



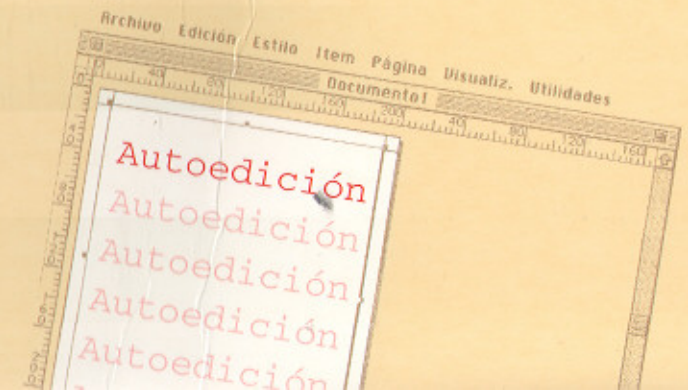
SERIE MATEMÁTICAS / 1



Lecciones de optimización

JUAN JOSÉ SALAZAR GONZÁLEZ

MANUALES Y TEXTOS UNIVERSITARIOS



Colección:
MANUALES Y TEXTOS UNIVERSITARIOS. AUTOEDICIÓN
Serie:
MATEMÁTICAS/1

Edita:
Servicio de Publicaciones
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
Campus Central
38200 La Laguna. Santa Cruz de Tenerife
Teléfono: 34 922 31 91 98

Diseño Editorial:
Jaime H. Vera.
Javier Torres.

1ª Edición 2000

*Prohibida la reproducción total o parcial
de esta obra sin permiso del editor.*

Preimpresión:
CONTACTO

Impresión:
GRÁFICAS SABATER

I.S.B.N.: 84-7756-493-0
Depósito Legal: TF-2743/99

A mis padres: Pepe y Ofelia.

CAPÍTULO I

- 1.1. INTRODUCCIÓN
- 1.2. EL NÚMERO
- 1.3. PARTES DE UN NÚMERO
- 1.4. DESARROLLO DE UN NÚMERO
- 1.5. COMPARACIÓN DE NÚMEROS
- 1.6. OPERACIONES

CAPÍTULO II

- 2.1. INTRODUCCIÓN
- 2.2. PROBLEMAS
- 2.3. PROBLEMAS DE NÚMEROS
- 2.4. PROBLEMAS DE OPERACIONES
- 2.5. PROBLEMAS DE COMPARACIÓN
- 2.6. PROBLEMAS DE DESARROLLO
- 2.7. PROBLEMAS DE COMPARACIÓN DE NÚMEROS
- 2.8. PROBLEMAS DE OPERACIONES
- 2.9. PROBLEMAS DE COMPARACIÓN
- 2.10. PROBLEMAS DE DESARROLLO

ÍNDICE

Índice	8
Prólogo	15
Notación	17

PRIMERA PARTE FUNDAMENTOS

CAPÍTULO 1. MOTIVACIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

1.1 INTRODUCCIÓN	23
1.2 EL MÉTODO CIENTÍFICO	25
1.3 PARTES DE LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA	27
1.4 PASADO, PRESENTE, FUTURO	28
1.5 COMPLEJIDAD ALGORÍTMICA.....	32
1.6 EJERCICIOS PROPUESTOS	43

CAPÍTULO 2. APLICACIONES PRÁCTICAS

2.1 INTRODUCCIÓN	47
2.2 PROBLEMA DE OPTIMIZAR UNA DIETA.....	50
2.3 PROBLEMA DE OPTIMIZAR MEZCLAS.....	51
2.4 PROBLEMA DE OPTIMIZAR LLAMADAS.....	53
2.5 PROBLEMA DE OPTIMIZAR UNA PRODUCCIÓN.....	54
2.6 PROBLEMA DE OPTIMIZAR UNA SELECCIÓN	55
2.7 PROBLEMA DE PLANIFICAR UN PROYECTO	56
2.8 PROBLEMA DE OPTIMIZAR EL PERSONAL.....	57
2.9 PROBLEMA DE OPTIMIZAR UNA SECUENCIA	58
2.10 PROBLEMA DE OPTIMIZAR EL TRAZADO DE LÍNEAS	60
2.11 PROBLEMA DE OPTIMIZAR UNA ASIGNACIÓN	61

2.12	PROBLEMA DE OPTIMIZAR MÚSICOS.....	62
2.13	PROBLEMA DE OPTIMIZAR LA BANDA DE UNA MATRIZ.....	66
2.14	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UNA INVERSIÓN.....	67
2.15	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UN DIVISOR DE TENSIÓN.....	69
2.16	PROBLEMA DE DESCUBRIR DATOS OCULTOS.....	72
2.17	PROBLEMA DE REDONDEOS EN UNA TABLA.....	74
2.18	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UNA CONTRATACIÓN.....	76
2.19	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UN MANTENIMIENTO.....	78
2.20	PROBLEMA DE OPTIMIZAR ENCENDIDOS.....	79
2.21	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UN JUEGO MATRICIAL.....	80
2.22	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UN INVENTARIO.....	83
2.23	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UN ALMACÉN.....	85
2.24	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UNA FUNDICIÓN.....	86
2.25	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UN DINERO.....	88
2.26	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UN CAPITAL.....	88
2.27	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UN TRANSPORTE.....	89
2.28	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UNA LOCALIZACIÓN.....	90
2.29	PROBLEMA DE OPTIMIZAR CORTES.....	91
2.30	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UN CRUCE.....	93
2.31	PROBLEMA DE OPTIMIZAR UNA FLOTA.....	95
2.32	PROBLEMA DE OPTIMIZAR TELEFONÍA MÓVIL.....	98
2.33	EJERCICIOS PROPUESTOS.....	101

CAPÍTULO 3. TEORÍA DE POLIEDROS

3.1	CONCEPTOS BÁSICOS.....	105
3.2	CARACTERIZACIÓN DE POLIEDROS.....	113
3.3	LEMA DE FARKAS.....	118
3.4	EJERCICIOS PROPUESTOS.....	122

SEGUNDA PARTE PROGRAMACIÓN LINEAL

CAPÍTULO 4. ALGORITMO DEL SIMPLEX

4.1	GEOMETRÍA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL.....	129
4.2	DISCRETIZACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL.....	130

4.3	SOLUCIÓN FACTIBLE BÁSICA.....	132
4.4	ALGORITMO DEL SIMPLEX.....	138
4.4.1	DE ITERACIÓN A ITERACIÓN.....	138
4.4.2	PRIMERA VERSIÓN: INVERSAS EXPLÍCITAS.....	140
4.4.3	SEGUNDA VERSIÓN: INVERSAS IMPLÍCITAS.....	144
4.4.4	TERCERA VERSIÓN: FORMA "TABLEAU".....	146
4.5	BASE FACTIBLE INICIAL.....	151
4.5.1	SI EXISTE UNA MATRIZ IDENTIDAD.....	151
4.5.2	MÉTODO DE LA M GRANDE.....	151
4.5.3	MÉTODO DE LAS DOS FASES.....	153
4.5.4	MÉTODO DE UNA SOLA VARIABLE ARTIFICIAL.....	159
4.6	CONVERGENCIA Y DEGENERACIÓN.....	161
4.7	ALGORITMO DEL SIMPLEX REVISADO.....	164
4.8	SIMPLEX PARA VARIABLES ACOTADAS.....	167
4.9	EJERCICIOS PROPUESTOS.....	174

CAPÍTULO 5. DUALIDAD

5.1	INTRODUCCIÓN.....	179
5.2	PROBLEMA DUAL.....	181
5.2.1	CONDICIONES DE OPTIMALIDAD.....	184
5.2.2	INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DEL PROBLEMA DUAL.....	184
5.2.3	ANÁLISIS DEL ALGORITMO DEL SIMPLEX PRIMAL.....	187
5.2.4	ALGORITMO DEL SIMPLEX DUAL.....	188
5.2.5	SOLUCIÓN FACTIBLE DUAL INICIAL.....	192
5.3	ANÁLISIS DE POST-OPTIMALIDAD.....	196
5.3.1	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD.....	197
5.3.2	AÑADIENDO UNA NUEVA VARIABLE Y/O INECUACIÓN.....	201
5.4	EJERCICIOS PROPUESTOS.....	204

CAPÍTULO 6. MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN

6.1	DESCOMPOSICIÓN DE DANTZIG-WOLFE.....	209
6.2	DESCOMPOSICIÓN DE BENDERS.....	219
6.3	RELACIONES ENTRE LAS DOS TÉCNICAS ANTERIORES.....	226
6.4	EJERCICIOS PROPUESTOS.....	227

TERCERA PARTE PROGRAMACIÓN ENTERA

CAPÍTULO 7. PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

7.1 FUNDAMENTOS	233
7.2 UNIMODULARIDAD.....	237
7.3 ALGORITMO DE HIPERPLANOS DE CORTE.....	240
7.3.1 CORTES DE GOMORY	242
7.3.2 CORTES DISYUNTIVOS	250
7.4 ALGORITMO DE RAMIFICACIÓN Y ACOTACIÓN	254
7.5 PROGRAMACIÓN DINÁMICA	269
7.6 FORMULANDO UN PROBLEMA (MODELIZACIÓN)	269
7.7 FORTALECIENDO UNA FORMULACIÓN (PREPROCESO)	275
7.8 EJERCICIOS PROPUESTOS	276

CAPÍTULO 8. TEORÍA DE GRAFOS

8.1 GRAFOS ORIENTADOS	281
8.2 GRAFOS NO ORIENTADOS.....	285
8.3 REPRESENTACIÓN DE GRAFOS.....	289
8.4 PROBLEMA DEL ÁRBOL GENERADOR DE COSTO MÍNIMO	294
8.4.1 DEFINICIÓN	294
8.4.2 UN MODELO MATEMÁTICO	296
8.4.3 CONDICIÓN DE OPTIMALIDAD.....	297
8.4.4 ALGORITMO DE PRIM	298
8.4.5 ALGORITMO DE KRUSKAL	299
8.5 PROBLEMA DEL CAMINO DE COSTO MÍNIMO	302
8.5.1 DEFINICIÓN	302
8.5.2 UN MODELO MATEMÁTICO	303
8.5.3 CONDICIÓN DE OPTIMALIDAD	304
8.5.4 ALGORITMO DE FORD.....	305
8.5.5 ALGORITMO SOBRE GRAFOS SIN CIRCUITOS	308
8.5.6 PLANIFICACIÓN DE PROYECTOS: ALGORITMO CPM.....	309
8.5.7 ALGORITMO DE DIJKSTRA.....	311
8.5.8 ALGORITMO DE FORD-MOORE-BELLMAN	316
8.5.9 ALGORITMO DE FLOYD-WARSHALL.....	317
8.6 PROBLEMA DEL FLUJO MÁXIMO	319
8.6.1 DEFINICIÓN	319

8.6.2 UN MODELO MATEMÁTICO	320
8.6.3 CONDICIÓN DE OPTIMALIDAD	321
8.6.4 ALGORITMO DE FORD-FULKERSON.....	324
8.6.5 ALGORITMO DE EDMOND-KARP	328
8.7 PROBLEMA DEL FLUJO DE COSTO MÍNIMO	331
8.7.1 DEFINICIÓN	331
8.7.2 UN MODELO MATEMÁTICO	332
8.7.3 CONDICIÓN DE OPTIMALIDAD	333
8.7.4 ALGORITMO DEL SIMPLEX PARA REDES	334
8.8 PROBLEMA DE TRANSPORTE.....	340
8.8.1 DEFINICIÓN	341
8.8.2 UN MODELO MATEMÁTICO	342
8.8.3 UN ALGORITMO	342
8.8.4 SOLUCIÓN INICIAL	344
8.8.5 COSTOS REDUCIDOS	345
8.8.6 VARIABLE QUE SALE.....	347
8.8.7 OPERACIÓN DE PIVOTACIÓN	348
8.9 PROBLEMA DE ASIGNACIÓN	348
8.9.1 DEFINICIÓN	349
8.9.2 UN MODELO MATEMÁTICO	351
8.9.3 UN ALGORITMO: MÉTODO HÚNGARO	352
8.9.4 GENERANDO UNA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA RESTRINGIDO	355
8.9.5 CAMBIO DE LA SOLUCIÓN DUAL.....	356
8.9.6 CONVERGENCIA	357
8.10 EJERCICIOS PROPUESTOS.....	359
CAPÍTULO 9. OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA	
9.1 INTRODUCCIÓN	365
9.2 PROBLEMAS \mathcal{NP} -DUROS	366
9.2.1 PROBLEMA DEL VIAJANTE DE COMERCIO.....	366
9.2.2 PROBLEMA DE LA MOCHILA.....	375
9.2.3 PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN SIN CAPACIDADES	378
9.2.4 PROBLEMA DEL ÁRBOL DE STEINER	380
9.2.5 PROBLEMA DE PARTICIÓN	384
9.2.6 PROBLEMA DE SECUENCIACIÓN DE OPERACIONES	387
9.2.7 PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA BOOLEANA.....	394
9.3 MÉTODOS	397

9.3.1	HEURÍSTICAS	397
9.3.2	RELAJACIONES	408
9.3.3	RAMIFICACIÓN Y ACOTACIÓN ("BRANCH-AND-BOUND")	416
9.3.4	RAMIFICACIÓN Y CORTE ("BRANCH-AND-CUT")	418
9.3.5	GENERACIÓN DE COLUMNAS ("BRANCH-AND-PRICE")	421
9.3.6	PROGRAMACIÓN DINÁMICA	426
9.4	EJERCICIOS PROPUESTOS	430

APÉNDICES

APÉNDICE A. UN SOFTWARE DE OPTIMIZACIÓN

A.1	GENERALIDADES	438
A.2	EL PROGRAMA INTERACTIVO	439
A.3	EJERCICIOS PROPUESTOS	446

APÉNDICE B. REFERENCIAS

B.1	BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA	451
B.2	OTROS LIBROS EN ESPAÑOL	452
B.3	NOTAS EN INTERNET	452
B.4	CINTAS DE VIDEO	453

ÍNDICE ALFABÉTICO	455
-------------------------	-----

PRÓLOGO

La *Programación Matemática* es un moderno campo dentro de las matemáticas aplicadas orientado al diseño de metodologías para resolver, desde un punto de vista práctico y quizás usando un ordenador, problemas de optimización con recursos limitados. Estos problemas aparecen en los procesos de Toma de Decisión en contextos de Economía, Ingeniería, Química, Biología, etc.

Este libro de texto es la unidad didáctica que su autor utiliza para impartir la asignatura cuatrimestral "Programación Matemática" en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de La Laguna. Constituye una herramienta fundamental para tales alumnos, y consideramos que puede ser de utilidad también para otros alumnos que cursen esta misma asignatura u otras relacionadas con la *Investigación Operativa*, dentro de los estudios de Ingeniería Electrónica, Ingeniería Informática, Ingeniería Química, Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas, Licenciatura en Economía, o Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas.

El texto contiene lecciones en Complejidad Computacional, Programación Lineal, Programación Entera, Programación Dinámica, Teoría de Grafos, y Optimización Combinatoria. Está dividido en tres partes, atendiendo respectivamente a fundamentos básicos, optimización lineal continua, y optimización entera.

La primera parte introduce y motiva el estudio de la Investigación Operativa. El capítulo 1 sitúa la Programación Matemática, mencionando sus objetivos y elementos, e introduce conceptos básicos de Complejidad Algorítmica. El capítulo 2 estimula al lector con treinta aplicaciones diferentes de la Programación Matemática. En el capítulo 3 se presentan lecciones de Análisis Convexo, y en particular de Teoría de Poliedros, indispensables para comprender los fundamentos de las técnicas que se introducen en el resto del texto.

La segunda parte presenta en su capítulo 4 el algoritmo del simplex (primal) en diversas formas, mientras que en el capítulo 5 se describe el algoritmo del simplex dual y el análisis de post-optimalidad. El capítulo 6 trata métodos de descomposición para afrontar grandes problemas de Programación Lineal, introduciéndose así los fundamentos de los recientes métodos en Programación Entera llamados *branch-and-cut* y *branch-and-price*.