

Metaheurística GRASP para el diseño de redes de tránsito rápido

Francisco Javier Martínez
Belén Melián
José A. Moreno*

Universidad de La Laguna
38271 La Laguna
{jmartine,mbmelian,jamoreno}@ull.es

Armando Garzón
Juan Antonio Mesa
Francisco A. Ortega**

Universidad de Sevilla
41071 Sevilla
{jmesa,riejos}@us.es

Resumen

En este trabajo se presenta un procedimiento heurístico GRASP para el problema del diseño de redes rápidas de tránsito (*Rapid Transit Network Design Problem*, RTNDP). El problema RTNDP consiste en determinar las líneas y la localización en ella de las estaciones de una red de tránsito rápido. Para establecer el diseño óptimo se tienen en cuenta algunos criterios relevantes como el coste de la inversión necesaria o el uso futuro de la red. Las alternativas se analizan a partir de la demanda de trayectos, de la distribución de trayectos, de los modelos de elección de los usuarios y del equilibrio del tráfico. La metaheurística GRASP proporciona las pautas para diseñar un proceso constructivo adaptativo para obtener las líneas que forman la red. La heurística es contrastada frente a la aplicación de un optimizador comercial basado en su formulación como un problema de programación lineal entera.

1. Introduction

El incremento en la movilidad de los ciudadanos, el aumento de la longitud de los de-

splazamientos por el crecimiento de las zonas urbanizadas y la reducción en la velocidad media del tráfico es una de las razones por las que en los últimos 50 años se han abierto nuevas líneas para sistemas de transporte rápido sobre raíles o se han creado redes basadas en tales líneas en numerosas aglomeraciones urbanas.

El umbral mínimo de población de una ciudad o área metropolitana para considerar la utilidad de crear una red de tránsito rápida sobre raíles depende, entre otros, de varios factores como la densidad de población, la disponibilidad de vehículos de transporte privado, la congestión del tráfico, o las cuestiones medioambientales. Este umbral ha pasado de aproximadamente dos millones de habitantes en los años 60 a cerca de medio millón de personas en el cambio de siglo. Como consecuencia de ello el número de ciudades interesadas en tales sistemas ha crecido significativamente.

Debido a las grandes inversiones en infraestructura necesarias para la apertura y operatividad de estos sistemas, es importante prestar atención al estudio de la eficiencia y efectividad de los mismos (ver [7]). Una parte importante del proceso de planificación de estos sistemas consiste en el diseño de la red sobre la que se articula: la determinación de las líneas y la localización de las estaciones.

Una vez determinada la matriz Origen-Destino de las demandas de tráfico pronosticadas el proceso de la selección de una red de líneas rápidas de transporte de masas se ha venido realizando mediante la identificación

*El trabajo de estos tres autores ha sido parcialmente financiado por los proyectos TIC2002-04242-C03-01 (70% son fondos FEDER) y PI042004/088, cuya actividad se enmarca dentro de los objetivos de la red RedHeur (proyecto TIN2004-20061-E).

**El trabajo de estos tres autores por los proyectos BFM2003-04062 del Ministerio de Educación y Ciencia y 2003/1360 del Ministerio de Fomento

de una pequeña lista de corredores potenciales de tránsito rápido. Sin embargo, la generación de una red basada exclusivamente en estos corredores puede llevar a descartar prematuramente diseños alternativos que pueden resultar de muchísimo interés. Recientemente se están aplicando metodologías alternativas de planificación del transporte que dan lugar a modelos más complejos que permiten contemplar un conjunto más exhaustivo de posibilidades pero que han podido ser resuelto sólo para tamaños moderados mediante técnicas de optimización exactas. Por este motivo se hace necesario el diseño y aplicación de procedimientos heurísticos con los que abordar esta tarea y la metaheurística GRASP tiene una serie de características apropiadas para estos problemas. Algunos de los estudios sobre modelos basados en unas pocas líneas son los trabajos de [2], [1], [4], [5] y [9].

En [10] se propone un proceso alternativo para el diseño de un sistema rápido de tránsito que incluye tres fases: 1) Selección de los nodos principales donde se generan (como origen o destino) una parte importante de los trayectos demandados, 2) Diseño de una red compuesta por un pequeño número de líneas basadas en tales nodos de forma que se maximice la efectividad de la misma, y 3) Localización precisa de las estaciones secundarias que permiten aprovechar adecuadamente la capacidad de tránsito de las líneas para absorber el mayor porcentaje de tráfico.

El objetivo fundamental de este trabajo es la segunda de estas fases. Para la primera fase existe una buena cantidad de procedimientos adecuados basados en estudios económicos y sociales, y para la tercera se han realizado algunas propuestas concretas en [6] y [8].

2. Formulación del problema

Una vez establecidas las estaciones principales que deben ser conectadas por el corazón o núcleo de la red pública de transporte que soporta el sistema de tránsito rápido, el problema consiste en establecer un conjunto reducido de líneas de transporte rápido $A = \{A_l : l = 1, \dots, L\}$ con origen o_l y destinos d_l correspon-

dientes. Este sistema de transporte debe competir con el sistema privado de transporte en la captación de los trayectos de los ciudadanos. Los datos de los que se parte son los siguientes:

- El conjunto $N = \{n_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ de nodos que representan las localizaciones potenciales para las estaciones principales; el número de estas localizaciones para una aglomeración de tamaño medio estaría entre 5 y 20.
- La matriz $D = (d_{ij} = d(n_i, n_j) : i, j = 1, \dots, n)$ de distancias entre pares de puntos de N . Estas distancias pueden aproximarse a las distancias euclídeas si se trata de un sistema de metro subterráneo pero debe tenerse en cuenta el diseño de las calles si se trata de un sistema de superficie en un área urbana, y una situación intermedia si se trata de un sistema elevado sobre el nivel del suelo.
- Un patron de trayectos de los usuarios potenciales dado por una matriz origen-destino $F = (f_p : p = 1, \dots, |P|)$ para el conjunto de pares de puntos de demanda de tráfico; $P \subseteq N \times N$.

Sea E el conjunto de enlaces factibles conectando estaciones en los nodos de N de forma que $G = (N, E)$ constituye un grafo dentro del que debe seleccionarse la red núcleo o principal. Para cada nodo $n_i \in N$ sea $N(i) = \{j : [n_i, n_j] \in E\}$ el conjunto de nodos adyacentes a n_i en el grafo G . Sean c_{ij} y c_i los costes de construcción de un enlace entre los nodos n_i y n_j y de una estación en el nodo n_i .

Para cada par $p = (q, r)$ de demanda de trayecto Origen-Destino sean c_p^{PRIV} y c_p^{PUB} los costes para los usuarios al utilizar el sistema privado o público, respectivamente, para satisfacer su demanda de trayecto de desplazamiento. El primero de estos valores vendrá dado previamente, pero el segundo dependerá de la topología final de la red de transporte público, y por tanto, de los enlaces seleccionados. Por tanto, se trabaja con unos costes generalizados c_{ij}^{PUB} dados para cada enlace $[n_i, n_j]$ que estará directamente relacionado con la distancia entre los nodos n_i y n_j . Mediante un

factor de escala, para realizar el análisis, se toman los costes públicos del uso de cada enlace igual a la distancia respectivas. Los demandantes de cada trayecto p usarán el sistema público si $c_p^{PRIV} > c_p^{PUB}$ siendo c_p^{PUB} la suma de los costes generalizados de los enlaces que usaría la demanda p .

Dependiendo de un presupuesto disponible para el coste total de construcción se tienen, para cada línea l , un cote mínimo y máximo ($c_{min}^l, c_{max}^l, l = 1, 2, \dots, L$), así como un coste total mínimo c_{min}^T y máximo c_{max}^T para la construcción de toda la red. El problema de optimización matemático consiste en elegir un número reducido L de líneas $A_l, l = 1, \dots, L$, cubriendo la mayor cantidad posible de demandas de transporte de los ciudadanos sujeto a las restricciones de los costes de construcción. Una línea A_l está constituida por una serie formada alternativamente por nodos y enlaces.

Para la formulación matemática del problema identificamos los índices i del conjunto de nodos $n_i \in N$ con el propio conjunto N y el de los pares ij con los enlaces $[n_i, n_j]$ del conjunto E . Por tanto, utilizamos expresiones como $i \in N$ para los nodos, $ij \in E$ para los enlaces y, por extensión $l \in L$ para las líneas y $p \in P$ para los pares origen-destino. Entonces, el modelo matemático de optimización es un problema de programación lineal entera (0-1) formulado con las siguientes variables:

- $y_i^l = 1$ si $i \in A_l$ y $y_i^l = 0$ en otro caso; $\forall i \in N, l \in L$.
- $x_{ij}^l = 1$ si $ij \in A_l$ y $x_{ij}^l = 0$ en otro caso; $\forall ij \in E, l \in L$.
- $u_{ij}^p = 1$ si los usuarios del trayecto p usarían el enlace ij de la red pública y $u_{ij}^p = 0$ en otro caso; $\forall p \in P, l \in L$.
- $z_p = 1$ si el coste generalizado para el trayecto p a través de la red pública es inferior al coste privado, y $z_p = 0$ en otro caso, $\forall p \in P$.

La función objetivo a maximizar refleja la cantidad de flujo absorbido que se calcula por:

$$Obj = \max \sum_{p \in P} f_p z_p \quad (1)$$

El conjunto de restricciones se puede agrupar de la forma siguiente:

A) Restricciones de coste o de longitud:

$$c_{min}^l \leq \sum_{i \in N} c_i y_i^l + 2 \sum_{ij \in E} c_{ij} x_{ij}^l \leq c_{max}^l, l \in L \quad (2)$$

$$c_{min}^T \leq \sum_{l \in L} \left[\sum_{i \in N} c_i y_i^l + 2 \sum_{ij \in E} c_{ij} x_{ij}^l \right] \leq c_{max}^T \quad (3)$$

B) Restricciones de alineación:

$$2 + \sum_{ij \in E} x_{ij}^l = 2 \sum_{i \in N} y_i^l, l \in L \quad (4)$$

$$\sum_{j \in N(i)} x_{ij}^l \leq 2 y_i^l, i \in N, l \in L \quad (5)$$

$$y_i^l \leq \sum_{j \in N(i)} x_{ij}^l, i \in N, l \in L \quad (6)$$

$$x_{ij}^l = x_{ji}^l, ij \in E, l \in L \quad (7)$$

C) Restricciones de enrutamiento de la demanda

$$\sum_{j \in N(q)} u_{qj}^p = 1, p = (q, r) \in P \quad (8)$$

$$\sum_{i \in N(q)} u_{iq}^p = 0, p = (q, r) \in P \quad (9)$$

$$\sum_{j \in N(r)} u_{rj}^p = 0, p = (q, r) \in P \quad (10)$$

$$\sum_{i \in N(r)} u_{ir}^p = 1, p = (q, r) \in P \quad (11)$$

$$\sum_{i \in N(j)} u_{ij}^p - \sum_{k \in N(j)} u_{jk}^p = 0, \quad j \in N \setminus \{q, r\}, p = (q, r) \in P \quad (12)$$

D) Restricciones de separación de la demanda

$$\sum_{ij \in E} c_{ij}^{PUB} u_{ij}^p - c_p^{PRIV} - M(1 - z_p) \leq 0,$$

$$p \in P \quad (13)$$

E) Restricciones de integralidad

$$x_{ij}^l, y_i^l, u_{ij}^p, z_p \in \{0, 1\},$$

$$i, j \in N, p \in P, l \in L \quad (14)$$

Las restricciones (2) y (3) establecen las limitaciones de inversión por cada línea y del presupuesto global. El 2 que aparece en ellas se debe a que si el enlace ij se construye toman el valor 1 las variables x_{ij} y x_{ji} .

La formación de caminos identificados por las variables x_{ij}^p e y_j^p que toman el valor 1 viene garantizada por las restricciones (4) y (5). Sin embargo se pueden producir ciclos. La restricción (6) evita las líneas formadas por un sólo nodo aislado y la restricción (7) implica que los enlaces construidos se pueden usar de la misma forma en ambos sentidos.

Las restricciones de enrutamiento (8-11) aseguran que la demanda de cada par es asignada a un camino entre su origen y su destino, y la restricción (12) es la de conservación del flujo.

En la restricción (13) el valor de la constante M debe ser lo suficientemente grande como para garantizar que si el coste generalizado para el trayecto para el par Origen-Destino p a través de la red pública, dado por las variables u_{ij}^p que toman el valor 1, es inferior al coste privado C_p^{PRIV} entonces, la variable z_p toma el valor 1 y en otro caso toma el valor 0.

3. Metaheurística GRASP

La metaheurística GRASP (*Greedy Random Adaptive Search Procedure*, [3], [11], [12]) comprende dos fases en la obtención de una solución, una fase constructiva y una fase de mejora o post-procesamiento. En la fase constructiva se aplica un procedimiento mixto voraz-aleatorio adaptativo basado en una lista restringida de candidatos. La fase de postprocesamiento se aplica a continuación para mejo-

rar la solución obtenida en la fase constructiva anterior. Como post-procesamiento suele emplearse una simple búsqueda local descendente. Ambas fases se reiteran hasta que se cumpla el criterio de parada y la mejor solución obtenida hasta entonces es la propuesta por el algoritmo. En la versión más simple de la metaheurística GRASP se prescinde de la fase de post-procesamiento.

En un procedimiento constructivo se incorpora iterativamente elementos a una estructura, inicialmente vacía, hasta obtener una solución del problema. La elección del elemento a incluir se debe basar en una evaluación *heurística* de lo conveniente que resulta la inclusión de ese elemento en la solución. La función heurística debe ser dependiente del problema y es reflejo del conocimiento que se tiene sobre las características de las buenas soluciones. Este procedimiento es adaptativo si la función heurística o el criterio para la selección del elemento a incluir depende de los elementos previamente incluidos en la solución.

Una de las estrategias constructivas más conocidas es la estrategia voraz o *greedy* en la que se selecciona el elemento que optimiza la función heurística. Esta estrategia, aunque da lugar a soluciones óptimas en algunos casos, suele dar pobres resultados en muchos problemas prácticos porque adolece de una visión *miope* del espacio de búsqueda. Otra estrategia rudimentaria muy simple aplicada con cierta frecuencia es la estrategia aleatoria consistente en seleccionar al azar el elemento a incluir en la solución. Pero esta estrategia da también malos resultados porque ignora cualquier información que discrimine entre los elementos posibles. Por ello se han propuesto estrategias alternativas como la de elegir aleatoriamente uno de los mejores elementos según la evaluación heurística. Esta es la opción que adopta la metaheurística GRASP en la fase constructiva.

La primera fase del GRASP se basa en la obtención en cada iteración del proceso constructivo de un conjunto de los mejores elementos a incluir que se denomina *Lista Restringida de Candidatos (LRC)*. En cada iteración se escoge al azar un elemento de la lista restringida

de candidatos. Por tanto, los elementos que determinan completamente la heurística GRASP son: la función heurística, la forma en que se construye la lista restringida de candidatos, el método de postprocesamiento y el criterio de parada.

Los pasos de un procedimiento GRASP se muestran en la figura 1.

Procedimiento GRASP:

1. Fase Constructiva
 Sea $x_0 = \{ \}$ una solución inicial vacía.
 Sea $t \leftarrow 0$.
 Repetir la siguiente secuencia hasta que no existan elementos que incluir en la solución parcial:
 - a) Construir la lista restringida de candidatos $RCL(t)$.
 - b) Elegir al azar un elemento e_{t+1} de $RCL(t)$.
 - c) Actualizar la solución parcial $x_{t+1} \leftarrow x_t \cup \{e_{t+1}\}$.
 - d) Hacer $t \leftarrow t + 1$.
 2. Fase de Post-procesamiento
 Aplicar un procedimiento de mejora.
-

Figura 1: Pasos de un procedimiento GRASP

Los detalles del método GRASP implementado para este problema son los siguientes.

En primer lugar se eligen al azar tantos nodos como líneas a crear que serán los nodos de partida. Estos constituirán el primer conjunto de nodos actuales. A partir de los nodos actuales se exploran los posibles nodos alcanzables por una arista.

Se construye la lista restringida de candidatos (LRC) formada por las cuatro aristas que enlacen con un nodo actual que absorba una cantidad de flujo mayor. Se escoge al azar una nueva arista de la lista LRC que se introduce en la solución actual si no viola las condiciones de factibilidad. Se recalcula el flujo del grafo.

En las siguientes iteraciones pueden formar parte de la lista restringida de candidatos las aristas que parten de nodos extremos de la solución parcial.

Estas operaciones se repiten iterativamente hasta que no se puedan introducir más aristas sin incumplir las restricciones.

Estos pasos describen la fase constructiva del GRASP y para esta experiencia hemos prescindido de la fase de post-procesamiento.

4. Experiencia computacional

Para contrastar el rendimiento de la heurística GRASP se ha usado en primer lugar una extensión del ejemplo [10] que se muestra en la figura 2. En esta figura se muestra en cada nodo o enlace el coste de construcción correspondiente entre paréntesis. Las longitudes de los enlaces y la numeración de los nodos están también indicados junto a ellos.

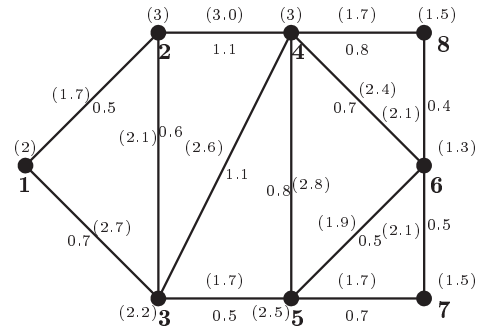


Figura 2: Red Ejemplo

Las matrices de origen-destino y los costes privados están indicados en la ecuación siguiente:

$$F = \begin{pmatrix} - & 9 & 26 & 19 & 13 & 12 & 13 & 8 \\ 11 & - & 14 & 26 & 7 & 18 & 3 & 6 \\ 30 & 19 & - & 30 & 24 & 8 & 15 & 12 \\ 21 & 9 & 11 & - & 22 & 16 & 25 & 21 \\ 14 & 14 & 8 & 9 & - & 20 & 16 & 22 \\ 26 & 1 & 22 & 24 & 13 & - & 16 & 14 \\ 8 & 6 & 9 & 23 & 6 & 13 & - & 14 \\ 9 & 2 & 14 & 20 & 18 & 16 & 11 & - \end{pmatrix}$$

$$C^{PRIV} = \begin{pmatrix} - & 1,6 & 0,8 & 2,0 & 2,6 & 2,5 & 3,0 & 2,5 \\ 2,0 & - & 0,9 & 1,2 & 1,5 & 2,5 & 2,7 & 2,4 \\ 1,5 & 1,4 & - & 1,3 & 0,9 & 2,0 & 1,6 & 2,3 \\ 1,9 & 2,0 & 1,9 & - & 1,8 & 2,0 & 1,9 & 1,2 \\ 3,0 & 1,5 & 2,0 & 2,0 & - & 1,5 & 1,1 & 1,8 \\ 2,1 & 2,7 & 2,2 & 1,0 & 1,5 & - & 0,9 & 0,9 \\ 2,8 & 2,3 & 1,5 & 1,8 & 0,9 & 0,8 & - & 1,3 \\ 2,8 & 2,2 & 2,0 & 1,1 & 1,5 & 0,8 & 1,9 & - \end{pmatrix}$$

Para simplificar el problema no se consideraron costes en los nodos asociados a la apertura de estaciones y los costes de construcción de los enlaces se tomaron iguales a su longitud. Por tanto, Las limitaciones de coste de las líneas se sustituyen por una limitación en su longitud y la limitación sobre el coste total de toda la red se sustituye por limitaciones en la longitud total. Además se toman los costes generalizados coincidentes con las distancias $c_{ij}^{PUB} = d_{ij}$.

Para la experiencia computacional en la resolución del problema se plantearon distintos contextos de niveles de congestión del tráfico privado reflejados en tres valores de un factor multiplicativo aplicado a los costes privados, 0,75, 1,00 y 1,50. Se presentan tres tablas para cada uno de estos niveles de congestión: el cuadro 1 para el factor de congestión 0.75, el cuadro 2 para el factor de congestión 1.00 y el cuadro 3 para el factor de congestión 1.50.

Se consideraron instancias del problema con un número $L = 1, 2, 3$ y 4 líneas. Se tomaron los límites (c^T) inferior y superior para la longitud total de la red L^T y los de las longitudes L^l de cada una de la líneas (c^l) que se reflejan en los cuadros 1, 2 y 3. Se muestran los resultados comparativos entre los obtenidos siguiendo [10] con el modelo matemático implementado en GAMS 2.0.27.7 que llama a CPLEX 9.0 con nuestro procedimiento GRASP implementado en C y ejecutado en un PC a 1.4 Ghz. Las columnas muestran, en primer lugar, los datos del problema, las soluciones, sus longitudes y el tiempo de computo en segundos empleado en encontrarla con la heurística GRASP, limitando el número de evaluaciones a 1000, y con el método exacto.

5. Conclusiones

En este primer test aplicado al procedimiento constructivo GRASP se observa que es capaz de encontrar soluciones óptimas o proximas en un tiempo de cómputo muchísimo menor. Estos resultados eran esperables puesto que el espacio de soluciones no es excesivamente grande mientras que la formulación matemática incluye un número alto de variables, incluso para un ejemplo de tamaño moderado como el utilizado en esta experiencia. Sin embargo existen algunos casos en los que, a pesar de disponer un tiempo considerable, la heurística no es capaz de alcanzar soluciones equivalentes a la proporcionada por el método exacto. Actualmente se están haciendo pruebas con instancias de mayor tamaño obtenidas a partir de datos relativos a la ciudad de Sevilla.

Como investigación futura se plantea el afinamiento del procedimiento para que tenga también un buen rendimiento en estos casos y analizar la escalabilidad del método al considerar problemas realistas de mayor tamaño obtenidos de los estudios de demandas de trayectos desarrollados para la planificación del metro de la ciudad de Sevilla. Además se contempla la posibilidad de combinar el método constructivo con una búsqueda local de mejora como post-procesamiento.

Referencias

- [1] Bruno, G., Gendreau, M. and Laporte, G. *A Heuristic for the Location of a Rapid Transit Line*. Computers & Operations Research 29 (2002) 1-12.
- [2] Dufourd, H., Gendreau, M. and Laporte, G. *Locating a Transit Line Using Tabu Search*. Location Science 4 (1996) 1-19.
- [3] Feo, T.A. and Resende, M.G.C. Greedy randomized adaptive search procedures. *Journal of Global Optimization*, 6:109-133, 1995.
- [4] García, R. and Marín, A. *Urban Multimodal Interchange Design Methodology*, in Mathematical Methods on Optimization in

Datos			GRASP					CPLEX				
c^T	$ L $	c^l	Líneas	L^l	Obj	L^T	t	Líneas	L^l	Obj	L^T	t
[2, 3]	1	[2, 3]	8-6-5-3-2-1	2.5	341	2.5	0.02	1-2-3-5-6-8	2.5	341	2.5	25.05
[2, 3]	2	[0.5, 2]	7-6-4	1.2	361	2.6	0.22	3-5-6-7	1.5	361	2.6	225.53
		[0.5, 2]	3-5-6-8	1.4				4-6-8	1.1			
[2, 3]	3	[0.5, 2]	8-6-7	0.9	392	2.9	2.11	3-5-6-8	1.4	392	3.0	62.47
		[0.5, 2]	3-2-1	1.1				1-2-3	1.1			
		[0.5, 1.5]	6-5-3	1.0				6-7	0.5			
[2, 3]	4	[0.5, 1.5]	3-5-6	1.0	392	3.0	2.97	1-2-3	1.1	392	3.0	68.11
		[0.5, 1.5]	2-1	0.5				7-6-8	0.9			
		[0.5, 1]	3-2		0.6			5-6	0.5			
		[0.5, 1]	7-6-8	0.9				3-5	0.5			
[3, 5]	1	[3, 5]	1-2-3-5-6-8-4	3.3	398	3.3	0.58	1-2-3-5-6-8-4	3.3	398	3.3	60.20
[3, 5]	2	[1, 3]	8-7-6-5	1.6	545	4.4	37.87	1-2-3-5-6-4	2.8	552	4.5	438.72
		[1, 3]	1-2-3-5-6-4	2.8				7-6-8-4	1.7			
[3, 5]	3	[1, 3]	4-6-7-5	1.9	569	4.6	4.77	5-7-6-4	1.9	578	4.6	11.03
		[1, 3]	2-3-5-6-8	2.0				1-3-5-6-8	2.1			
		[0.5, 2]	1-3	0.7				2-3	0.6			
[3, 5]	4	[1, 2]	3-5-6-7	1.7	569	4.9	1.42	1-3-2	1.3	578	4.6	21.05
		[0.5, 2]	4-6	0.7				5-6-7	1.0			
		[0.5, 2]	1-3-2	1.3				4-6-8	1.1			
		[0.7, 1.5]	5-6-8	0.9				3-5-7	1.2			

Cuadro 1: Tabla Comparativa. Congestión = 0.75

Datos			GRASP					CPLEX				
c^T	$ L $	c^l	Líneas	L^l	Obj	L^T	t	Líneas	L^l	Obj	L^T	t
[2, 3]	1	[2, 3]	4-8-6-5-3-1	2.9	417	2.9	0.07	1-3-5-6-8-4	2.9	417	2.9	305.11
[2, 3]	2	[0.5, 2]	4-5-6-7	1.8	461	2.70	0.28	1-3-5-4	2.0	461	3.0	1773.03
		[0.5, 2]	5-3-1	1.2				5-6-7	1.0			
[2, 3]	3	[0.5, 2]	8-6-5-3	1.4	525	3.0	2.88	1-2-3	1.1	525	3.0	91.77
		[0.5, 2]	7-6	0.5				7-6-8	0.9			
		[0.5, 1.5]	3-2-1	1.1				3-5-6	1.0			
[2, 3]	4	[0.5, 1.5]	3-5-6	1.0	525	3.0	4.87	7-6-8	0.9	525	3.0	555.30
		[0.5, 1.5]	3-2	0.6				3-5-6	1.0			
		[0.5, 1]	7-6-8	0.9				2-3	0.6			
		[0.5, 1]	2-1	0.5				1-2	0.5			
[3, 5]	1	[3, 5]	1-3-5-7-6-8-4-2	4.7	548	4.7	0.06	1-3-5-7-6-8-4-2	4.7	548	4.7	95.81
[3, 5]	2	[1, 3]	1-3-5-6-8	2.1	801	5	0.16	2-3-4-6-8	2.8	801	5.0	4.89
		[1, 3]	7-6-4-3-2	2.9				1-3-5-6-7	2.2			
[3, 5]	3	[1, 3]	5-6-7	1.0	780	4.7	18.37	2-3-4-6-8	2.8	801	5.0	2.44
		[1, 3]	2-3-5-4-6-8	3.0				1-3-5	1.2			
		[0.5, 2]	1-3	0.7				5-6-7	1.0			
[3, 5]	4	[1, 2]	8-6-4	1.1	780	4.7	30.04	5-6-7	1.0	801	5.0	4.42
		[0.5, 2]	2-3-1	1.3				1-3-4	1.8			
		[0.5, 2]	4-5-3	1.3				4-6-8	1.1			
		[0.7, 1.5]	5-6-7	1.0				2-3-5	1.1			

Cuadro 2: Tabla Comparativa. Congestión = 1.00

Datos			GRASP					CPLEX				
c^T	$ L $	c^l	Líneas	L^l	Obj	L^T	t	Líneas	L^l	Obj	L^T	t
[2, 3]	1	[2,3]	4-8-6-5-3-1		471	2.9	0.13	1-3-5-6-8-4	2.9	471	2.9	214.42
[2, 3]	2	[0.5,2] [0.5,2]	8-6-4 6-5-3-1	1.1 1.7	522	2.8	0.71	1-2-3-5-6 7-6-8	2.1 0.9	557	3.0	13079.7
[2, 3]	3	[0.5,2] [0.5,2] [0.5,1.5]	3-5-6 3-2-1 8-6-7	1.0 1.1 0.9	557	3.0	2.71	7-6-8 3-5-6 1-2-3	0.9 1.0 1.1	557	3.0	2300.56
[2, 3]	4	[0.5,1.5] [0.5,1.5] [0.5,1] [0.5,1]	6-5-3 7-6-8 2-1 2-3	1.0 0.9 0.5 0.6	557	3.0	0.75	3-5-6-8 6-7 2-3 1-2	1.4 0.5 0.6 0.5	557	3.0	3392.84
[3, 5]	1	[3,5]	1-2-3-5-4-8-6-7	4.1	729	4.1	0.1	2-1-3-4-8-6-5-7	4.7	729	4.7	9.26
[3, 5]	2	[1,3] [1,3]	2-3-5-6-7 8-6-4-3-1	2.1 2.9	833	5.0	0.17	2-3-5-7-6-8 1-2-4-6	2.7 2.3	833	5.0	3.08
[3, 5]	3	[1,3] [1,3] [0.5,2]	4-3-2-1 7-6-5-3 4-6-8	2.2 1.5 1.1	833	4.8	16.54	1-2-3-5-6-8 3-4-8 6-7	2.5 1.9 0.5	833	4.9	3.73
[3, 5]	4	[1,2] [0.5,2] [0.5,2] [0.7,1.5]	5-3-2 8-6-4 4-2-1 7-5-6	1.1 1.1 1.6 1.2	833	5.0	21.98	4-3-5 5-6-8 4-6-7 1-3-2	1.6 0.9 1.2 1.3	833	5.0	23.17

Cuadro 3: Tabla Comparativa. Congestión = 1.50

- Transportation Systems, Ed. M. Pursula and J. Niittymäki, Kluwer Academic Pub. (2001), 49-79.
- [5] García, R. and Marín, A. Parking Capacity and Pricing in Park'n Ride Trips: A Continuous Equilibrium Network Design Problem. *Annals of Operations Research* 116 (2002) 153-178.
- [6] Hamacher, H., Liebers, A., Schöbel, A., Wagner, D. and Wagner, F. Locating New Stops in a Railway Network. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 50 (2001) 11 pages.
- [7] Karlaftis, M. G. A DEA Approach for Evaluating the Efficiency and Effectiveness of Urban Transit Systems. *European Journal of Operational Research* 152 (2004) 354-364.
- [8] Laporte, G., Mesa, J.A. and Ortega, F.A. Locating Stations on Rapid Transit Lines. *Computers & Operations Research* 29 (2002) 741-759.
- [9] Laporte, G., Mesa, J.A., Ortega, F.A. and Sevillano, I. Maximizing Trip Coverage in the Location of a Single Rapid Transit Alignment. Accepted in *Annals of Operations Research* (2004).
- [10] Laporte, G., Marín, A., Mesa, J.A. and Ortega, F.A. An Integrated Methodology for the Rapid Transit Network Design Problem. Working Paper (2005).
- [11] Resende, G.C.M., Ribeiro, C. (2003) *Greedy Randomized Adaptive Search Procedures* In F. Glover and G. Kochenberger, editors, *Handbook on MetaHeuristics*, chapter 8. 2003.
- [12] Resende, G.C.M., González Velarde, J.L. (2003) *GRASP: Procedimientos de búsquedas miopes aleatorizados y adaptativos* *Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*. Numero 19, Volumen 2, páginas 61-76