

Preferencias Difusas en un Sistema Experto de Ayuda a la Decisión

José A. Moreno Pérez y J. Marcos Moreno Vega

Universidad de La Laguna, Departamento de Estadística, I.O. y Computación,
La Laguna, España, 38271
jamoreno@ull.es

ABSTRACT

The result of the integration of expert systems and decision support systems are the Expert Decision Support Systems (*EDSS*). A Decision Support System is a computer-based system designed to assist in complex problems of decision making. The Expert Systems are systems that employs human knowledge captured in a computer to perform tasks that ordinarily require human expertise. The main characteristic of the Expert Decision Support Systems is the use of expert knowledge to get conclusions on the comparisons of alternatives in the decision process. The preference relational systems are preference models based on binary relations on the alternatives that arise from paired comparisons. An expert shows the preferences by fuzzy linguistic terms and the corresponding model is the linguistic assessed fuzzy preference relational system. In this work the main aspects of the integration between expert systems and decision support systems and the use of these preference models to manage the preferences of experts in these systems are analyzed.

Keywords: Decision Support Systems. Expert Systems. Fuzzy Preferences. Preference Relational Systems. Semiorder. Interval Order.

RESUMEN

El resultado de la integración de los sistemas expertos y los sistemas de ayuda a la decisión son los Sistemas Expertos de Ayuda a la Decisión (*SEAD*). Un sistema de ayuda a la decisión es un sistema informático diseñado para la asistencia en problemas complejos de toma de decisiones. Los sistemas expertos son sistemas que usan conocimiento HUMANO almacenado en un ordenador para realizar tareas que ordinariamente requerirían experiencia humana. La característica principal de los sistemas expertos de ayuda a la decisión es el uso de conocimiento experto para obtener conclusiones sobre las comparaciones entre las alternativas en el proceso de decisión. Los sistemas relacionales de preferencia son modelos de preferencias basados en relaciones binarias sobre las alternativas surgidas de las comparaciones por pares. Un experto muestra las preferencias con términos lingüísticos difusos y el correspondiente modelo es el sistema relacional de preferencias con apreciaciones lingüísticas difusas. En este trabajo, se analizan los aspectos principales de la integración entre los sistemas expertos y los sistemas de ayuda a la decisión y el uso de estos modelos de preferencia para tratar las preferencias de los expertos en estos sistemas.

Palabras claves: Sistemas de Ayuda a la Decisión. Sistemas Expertos. Preferencias Difusas. Sistema Relacionales de Preferencias. Semiorden, Orden de Intervalo.

1 INTRODUCCIÓN

Los Sistemas Expertos de Ayuda a la Decisión (SEAD) surgen de la integración de las metodologías y tecnologías propias de los Sistemas de Ayuda a la Decisión, Sistemas de Decisión Asistida o Sistemas de Soporte de Decisiones (DSS, *Decision Support Systems*) y de los Sistemas Basados en el Conocimiento Experto o Sistemas Expertos (ES, *Expert Systems*) en un mismo producto bajo las siglas EDSS (*Expert Decision Support Systems*). El término *Sistema de Ayuda a la Decisión* (DSS) se aplica generalmente a los sistemas que están diseñados para facilitar la evaluación y análisis en la toma de decisiones en situaciones complejas. El término *Sistema Experto* (ES) se aplica a un sistema que, mediante un ordenador, emplea de forma explícita conocimiento de un experto humano para realizar una tarea. Por tanto, *Sistema Experto de Ayuda a la Decisión* (EDSS) es el término aplicable a un sistema informático que utiliza el conocimiento de un experto para facilitar la tarea de la toma de decisiones en situaciones complejas.

Integración de DSS y ES

Los DSS y los ES son, en principio, dos tipos de sistemas informáticos diferenciados pero ambos pueden mejorar sus prestaciones y aumentar su campo de acción integrándose con el otro. Existe un importante punto de encuentro para ambos; los DSS usan conocimiento *experto* y los ES están orientados hacia la toma de *decisiones*. Las diferencias se centran en los siguientes aspectos. El objetivo; los DSS están concebidos para asistir a los decisores mientras que los ES para complementar a expertos humanos. El dominio; mientras que los DSS están enfocados hacia problemas en contextos muy diversos los ES se ajustan a dominios estrechos. Las capacidades; en los ES son importantes las explicaciones y razonamientos mientras que los DSS no son relevantes. La computación; fundamentalmente numérica en los DSS y con incorporación también de procesamiento simbólico en los ES. Los usuarios; los DSS están orientados hacia usuarios en grupos mientras que los ES están casi exclusivamente diseñados para usuarios individuales. La interacción; el usuario requiere información al DSS; las preguntas las formula un humano mientras que los ES obtienen información del experto. Ambas metodologías se han desarrollado separadamente pero están surgiendo buenas muestras de los beneficios que reporta su colaboración (ver [1], [5], [12]). La integración de los DSS y los ES se puede plantear de diferentes formas. Como dos sistemas que se comunican, capacitando a uno de ellos (o a ambos) para recibir la información proporcionada por el otro. O bien introduciendo uno de ellos como subsistema o parte del otro. Los primeros pasos han sido, por un lado, dotar a los DSS de un interface amigable con uso de lenguaje natural al requerir u ofrecer información o de sistemas inteligente de consultar grandes bases de datos y, por otro, dotar a los ES de las técnicas de análisis de las decisiones complejas. Sin embargo, la línea más prometedora se orienta a la concepción de un nuevo tipo de sistema que engloba a ambas perspectivas.

Sistemas Relacionales de Preferencias.

Cualquier decisión inteligente debe estar basada en criterios que muestren las preferencias sobre el conjunto de alternativas. Los *Sistemas de Preferencias* son modelos para formalizar y tratar información sobre preferencias. La forma más directa de mostrar las preferencias es a través de comparaciones por pares. Los Sistemas Relacionales de Preferencias son sistemas de preferencias basados relaciones binarias. Las Relaciones Binarias son las herramientas matemáticas más apropiadas para modelizar preferencias basadas en comparaciones entre pares de alternativas. El modelo clásico es el sistema relacional simple de preferencias consistente en tres relaciones binarias: la preferencia, la indiferencia y la incomparabilidad. La preferencia y la indiferencia esta presentes en cualquier modelo de preferencias. La incomparabilidad corresponde a la inexistencia de información suficiente para relacionar las alternativas. Un sistema de preferencias se dice *completo* si no se contempla la incomparabilidad. Este modelo básico se va extendiendo al introducir relaciones intermedias. El sistema relacional doble aparece al incluir sólo una relación intermedia, la semipreferencia, entre la indiferencia y la preferencia.

Apreciaciones Difusas de las Preferencias

Un *Sistema Relacional de Preferencias Graduales* se obtiene incluyendo, además de la incomparabilidad y la indiferencia, una serie de relaciones de preferencias graduales. Estas relaciones corresponden a diferentes grados o intensidades en la apreciación de la preferencia por parte del experto. Las diferentes graduaciones son manifestadas usando términos lingüísticos, generalmente de carácter difuso, tales como preferencia ligera, preferencia débil, preferencia fuerte, casi-preferencia, preferencia estricta, preferencia total, etc. El modelo resultante es el *Sistema Relacional de Preferencias Difusas* o sistema relacional de preferencias con apreciaciones lingüísticas difusas (*Linguistic Assessed Fuzzy Preference Relational Systems* [8]). Este modelo de preferencias permite utilizar la metodología de las técnicas *fuzzy* o difusas para tratar la información sobre las apreciaciones difusas del experto sobre las alternativas y sus comparaciones.

Soportes de valor-umbral

Una manera racional de adoptar un sistema de preferencias es usando *valoraciones* sobre las alternativas y determinando *umbrales* para las preferencias. Un *soporte* de valor umbral de un sistema de preferencia es la herramienta formal constituida por valoraciones y umbrales que establecen las relaciones de preferencia e indiferencia del sistema. Para un sistema relacional simple, la preferencia se establece cuando la valoración de una alternativa sobrepasa el umbral de la otra. Para los sistemas graduales el soporte está compuesto por una valoración y un umbral para cada uno de los diferentes grados de preferencia. En los modelos difusos tanto las valoraciones como los umbrales vienen expresados en términos de apreciaciones difusas de las valoraciones y de las alternativas. Todo sistema relacional de preferencias con soporte es completo; la incomparabilidad sólo estaría presente en el proceso de modelización mientras alguna de las componentes del soporte no estuviera completamente disponible.

Transitividades mixtas

La *Transitividad* juega un papel central en la modelización de preferencias con relaciones binarias (ver [7]). La transitividad representa la vía de inferencia fundamental para las relaciones de preferencia. En la teoría clásica, la propiedad transitiva se impone a la relación de preferencia y a veces a la de indiferencia. La transitividad de la relación de indiferencia es frecuentemente contestada con paradojas realistas de cadenas de indiferencias, donde la primera y última alternativa son claramente no indiferentes. No obstante, se pueden contemplar modelos que reflejen una situación intermedia. Dada una cadena de relaciones de preferencia e indiferencia (posiblemente de diferente tipo), parece natural que si las relaciones de preferencia son significativamente más intensas que las indiferencias, entonces exista cierto grado de preferencia entre la primera y última alternativa de la cadena. El tipo de preferencia entre estas alternativas extremas debe ser función del grado, posición y número de las relaciones de preferencia e indiferencia que componen la cadena. Argumentos de este tipo dan lugar a varias condiciones en las cadenas de relaciones sobre alternativas para poder concluir algún grado de preferencia entre las alternativas situadas en los extremos de la cadena. Las propiedades resultantes, similares a la transitividad pero incluyendo distinto tipo de preferencia, se conocen como *Transitividades Mixtas* y refleja vías alternativas de inferencia sobre relaciones de preferencia de distinto tipo (ver [6], [7]).

Estructuras de los sistemas de preferencia.

La *estructura* de un sistema relacional de preferencias viene dado, además de por las relaciones binarias incluidas y las propiedades individuales de cada relación, por las conexiones entre las relaciones. Las estructuras clásicas para los sistemas relacionales simples de preferencia son el orden de intervalo, el semiorden y el preorden ([9], [10]). Estas estructuras se pueden definir por medio de transitividades mixtas. Las definiciones de las estructuras de orden de intervalo y de semiorden se extienden a los sistemas graduales de preferencias y a los sistemas relacionales de preferencia con apreciaciones lingüísticas difusas usando también propiedades de transitividad mixta. Las *implicaciones esenciales* de una estructura son las propiedades obtenidas al aplicar las transitividades mixtas a las cadenas más cortas contempladas en ellas y que caracterizan la estructura. El conjunto de implicaciones esenciales correspondientes a cada estructura representa las reglas de inferencia elementales sobre relaciones de preferencia. Estas implicaciones constituyen los axiomas de las estructuras desde los que se deducen las demás propiedades; entre ellas las transitividades mixtas. Utilizando las implicaciones esenciales de los semiórdenes y los órdenes de intervalo se obtienen resultados referentes a las propiedades de monotonía de los soportes que caracterizan estas estructuras. Estos resultados se extienden a los sistemas graduales y a los sistemas relacionales de preferencia con apreciaciones lingüísticas difusas

En las dos siguientes secciones se describen los aspectos más importantes de los sistemas de ayuda a la decisión y de los sistemas expertos de cara a su integración en un sistema único y del uso de la información referente a las apreciaciones difusas de expertos sobre comparaciones entre alternativas. En la sección cuatro se introducen los sistemas relacionales de preferencias simples, graduales y lingüísticas difusos como modelos de preferencia y se presentan los resultados que permiten extender los conceptos y herramientas de los semiórdenes y órdenes de intervalo a estos modelos.

2 SISTEMAS DE AYUDA A LA DECISIÓN

Concepto de Ayuda a la Decisión

Los *Sistemas de Ayuda a la Decisión* (DSS) son sistemas desarrollados para ayudar, asistir o soportar la toma de decisiones. Con una interpretación genérica, un simple programa de base de datos es un DSS. La concepción DSS debe centrarse en las características y objetivos que debe tener el sistema. Entre las características relevantes que se le

suponen a un DSS están las siguientes. Debe ser un sistema interactivo, debe ser flexible y adaptativo, debe utilizar datos e información y debe utilizar modelos analíticos.

El proceso de decisión

El *proceso* de la toma de decisiones tiene tres fases: inteligencia, diseño y elección. La inteligencia es la fase de búsqueda de las condiciones que demandan decisiones. El diseño es la fase de inventar, desarrollar y analizar la posible secuencia de las acciones. La fase de elección es la de seleccionar una de las alternativas entre las disponibles. Un DSS puede ser útil si, por medio de la potencia de un ordenador, permite clarificar o facilitar el procesamiento de los datos o el análisis de los modelos. En un problema poco estructurado, las decisiones suelen estar basadas en la intuición o experiencia humana. En estos problemas se toman decisiones basadas en conocimiento experto por lo que los sistemas que integran DSS y ES son los más apropiados. Los problemas semiestructurados están en una situación intermedia y hay que aplicar una combinación entre juicios personales y procedimientos de solución estándares. En estos problemas la integración de los ES y los DSS resulta crucial para mejorar las circunstancias en las que se adoptan las decisiones, permitiendo un análisis más profundo de las alternativas utilizando conocimiento obtenido de la experiencia.

La Toma de Decisiones

La *toma de decisiones* consiste esencialmente en elegir una alternativa en base al análisis y la evaluación de las alternativas. El objeto fundamental de los DSS es mejorar las circunstancias en las que se adoptan las decisiones favoreciendo las tareas de evaluación y elección de alternativas. El uso de los recursos informáticos en la toma de decisiones en gestión ha ido creciendo rápidamente en todos los entornos y hoy en día es esencial para muchas organizaciones. La gestión se va haciendo cada vez más compleja de forma que las decisiones intuitivas adoptadas por los gestores son cada vez más deficientes si no cuentan con herramientas de apoyo. Existen diferentes categorías de problemas de decisión atendiendo al grado de estructuración y formalización del problema. Los problemas bien estructurados se abordan con métodos cuantitativos de análisis, pero en los problemas complejos los sistemas de ayuda a la decisión tienen que facilitar la interacción entre los gestores y los métodos de análisis de los subproblemas más estructurados. Los sistemas de información básicos para apoyar la gestión se limitan a proporcionar, de forma apropiada en tiempo y detalle, la información relacionada con las tareas a realizar. En el uso de los sistemas informáticos como ayuda en las decisiones complejas se destacan el manejo eficiente de gran cantidad de información, la interacción amigable y fácil de visualizar, y el uso de conocimiento experto como las características más importantes.

La gestión de la información

La *gestión de la información* disponible es un aspecto clave en el éxito de los DSS. Entre las características esenciales de los DSS destacan el que tratan con información diversa, que se puede concretar en datos y con modelos. Entre los beneficios esperados de un DSS están la mejora la efectividad de las decisiones, facilitar la adquisición y organización de información y propiciar elecciones mejor sustentadas. Las componentes básicas de los DSS son: el sistema de gestión de datos (incluyendo los sistemas de gestión de bases de datos), el sistema de modelos (incluyendo las herramientas para su tratamiento) y el interface amigable (con los dispositivos de interacción apropiados). Los primeros DSS surgieron de los sistemas de gestión de bases de datos al ir incorporando nuevas capacidades. La importancia de la manipulación de la información en los DSS ha aumentado considerablemente debido a la necesidad de usar la máxima cantidad de información de forma eficiente y de acudir a complejas fuentes de información. Estas fuentes para la adquisición de información pueden ser, además de múltiples bases de datos, propias o externas, y las interacciones con otros agentes, entre los que se encuentran los expertos. El desarrollo de los sistemas de gestión de bases de datos permite contar con DSS basados en sistemas de información muy potentes y versátiles. Los sistemas de gestión de bases de modelos deben incluir herramientas para ajustar los modelos al usuario o su entorno. La componente de tratamiento de modelos de un DSS debe contar con las herramientas adecuadas entre las que se debe encontrar las de tratamiento de preferencias.

La interacción

La *interacción* a través del interface de dialogo con los agentes externos es de máxima importancia en el éxito de los DSS. Se entiende por interface tanto el hardware como el software que permite el intercambio de información o diálogo entre el sistema y su entorno. Debe adaptarse a las necesidades del usuario, de forma que muestre sus capacidades y ofrezca soporte efectivo en tiempo y calidad en el proceso de decisión. Para este propósito es esencial contar con herramientas de visualización (principalmente gráficas) capaces de ofrecer prestaciones necesarias para aprovechar las capacidades del DSS. Los procedimientos que permiten la transmisión de información al sistema por parte de los expertos deben estar capacitados para adquirir de forma eficiente el tipo de información relevante. La organización del

interface a base de menús desplegables, lenguaje de comandos, formularios, sistemas de preguntas/respuestas o tratamiento del lenguaje natural son las alternativas que pueden integrar en un modulo global que obtenga los beneficios de cada una de ellos adoptando la metodología más apropiada en función de las circunstancias. Los GUI (*Graphical User Interfaces*) que permiten tratar de forma cómoda y eficiente con objetos y acciones visualizados contribuyen a potenciar la componente de los DSS dedicada al diálogo con humanos expertos. La tecnología multimedia se combina activamente con los elementos de la manipulación para la presentación de información y ejecución de acciones que permiten facilitar y acelerar la intervención del experto en la interacción. Las técnicas de realidad virtual permiten aproximar al experto a entornos realistas en la adopción de las decisiones. Las cuestiones de movimiento, luminosidad, sombras y colores son ya relevantes en el diseño adecuado de los entornos gráficos con los que se implementan los sistemas de interacción visual. Sin el uso masivo de los sistemas de tratamiento de lenguaje natural, algunos de los aspectos básicos se incorporan en la confección de las herramientas de interacción con los expertos. La síntesis y reconocimiento de voz se incorpora aceleradamente a las tecnologías que aportan beneficios en este campo.

3 SISTEMAS EXPERTOS.

Concepto de Sistema Experto

Una definición formal rigurosa y unánime de ES tiene dificultades insalvables. Una interpretación en este contexto gira en torno al uso del conocimiento de un experto humano para desempeñar una función. El conocimiento experto es conocimiento derivado, directa o indirectamente, de la experiencia, generalmente es heurístico, no analítico, de alto nivel y no documentado. Este conocimiento generalmente se manifiesta a través de preferencias en comparaciones de alternativas por pares. El *propósito* de un ES no debe ser reemplazar al experto sino permitir que su conocimiento y experiencia estén más asequibles; usarlas sin necesidad de tener los expertos a mano. Entre las principales dificultades de los sistemas expertos está el hecho de que el conocimiento experto es difícil de extraer ya que los expertos usan vocabularios muy específicos y muchas jergas. El proceso de adquisición del conocimiento experto es fundamental en el éxito de un ES.

Los Sistemas Basados en el Conocimiento

Un sistema experto es un sistema basado en el conocimiento experto. Los *sistemas basados en el conocimiento* (SBC) son los sistemas resultantes de aplicar la representación del conocimiento y los mecanismos de razonamiento para realizar una tarea. La característica básica de un SBC es la existencia de una base de conocimientos a la que se aplican mecanismos de razonamiento que extraen la información contenida explícita o implícitamente en la base. Una base de conocimientos es un conjunto de símbolos que representa cierta realidad y que puede ser utilizada e interpretada por un agente. Para adoptar un sistema de *representación* del conocimiento para un SBC hay que establecer los objetivos que permiten determinar características deseables o propiedades que debe cumplir el sistema. Los objetivos deben ser tanto epistemológicos como heurísticos y se centran en la suficiencia/completitud y en la eficiencia/eficacia (notacional y computacional) de la capacidad deductiva y de almacenamiento de conocimiento. Tras la construcción del sistema, los objetivos se transforman en criterios de evaluación. Las propiedades epistemológicas de un buen sistema de representación del conocimiento son: la suficiencia de la representación (la capacidad para representar todo el conocimiento necesario en el dominio) y la suficiencia deductiva (la capacidad para manipular las estructuras de la representación para obtener nuevo conocimiento deducido del antiguo). Las propiedades heurísticas de un buen sistema de representación del conocimiento son: la eficiencia deductiva (la capacidad para incorporar información adicional en las estructuras de la representación) y la eficiencia en la adquisición (la facilidad en la adquisición de nuevo conocimiento). El objetivo global es obtener la capacidad representacional para tratar todo el conocimiento necesario y posibilitar mecanismos eficientes de razonamiento y aprendizaje. Estos aspectos son especialmente relevantes al usar el conocimiento experto para establecer comparaciones. El soporte disponible como herramientas de manipulación y fundamento cognitivo de la representación contribuye a elevar las ventajas del sistema de representación.

Conocimiento experto

Un sistema basado en el conocimiento (SBC) es un sistema de IA que utiliza de forma explícita conocimiento para realizar eficientemente una tarea en un dominio. Un sistema experto (ES) es un sistema basado en el conocimiento de un experto; es decir un *Sistema Basado en Conocimiento Experto* (SBCE). El Conocimiento experto es el conocimiento derivado, directa o indirectamente, de la experiencia, generalmente es no analítico, de alto nivel y no documentado. Las características especiales del conocimiento experto son determinantes en todos los procesos básicos de la ingeniería del conocimiento: el aprendizaje, la representación, el razonamiento y la explicación. El conocimiento experto es el

conocimiento extenso y específico obtenido por entrenamiento y comprensión sobre experiencias en una actividad que permite mejorar sus prestaciones. El tipo de conocimiento experto puede variar en un amplio rango, muchos son de tipo relacional, desde las estrechas relaciones entre estímulo y respuestas, respuestas a preguntas, parejas input/output hasta las profundas y complejas interacciones de las componentes un sofisticado sistema.

Extracción del conocimiento experto

Las principales dificultades del proceso de extracción de conocimiento experto son: la complejidad del conocimiento experto y de su representación, las derivadas de la comunicación e información (vocabulario específico, incluso jergas), suele estar implícito y activarse sólo ante situaciones concretas que pueden ser imprevisibles, la ignorancia o inexperiencia del ingeniero del conocimiento en el campo del experto, la ignorancia o inexperiencia del experto en la ingeniería del conocimiento. Los métodos de adquisición del conocimiento experto pueden ser: totalmente automatizado, semiautomatizado o nada automatizado (manual). Se basan en entrevistas que pueden ser estructuradas en mayor o menor grado; la observación del comportamiento del experto contribuye a orientar la metodología. Las fases o etapas del proceso de adquisición son: identificación del problema, conceptualización del conocimiento, formalización del proceso, implementación de las conclusiones y comprobación de los resultados. Si hay varios expertos las dificultades aumentan si existe disparidad de criterios. La tarea básica es la de estructurar el problema, interpretar e integrar la información aportada. Existen procedimientos y herramientas específicas para las distintas situaciones específicas: si los expertos están en contacto o aislados, si el grado de experiencia es diferente o en diferentes facetas de la tarea, si el grupo de expertos es reducido o muy amplio, etc.

Componentes de un sistema basado en el conocimiento experto

Un sistema basado en el conocimiento experto se estructura atendiendo a una descomposición de sus funciones. Las cuatro funciones básicas de un SBC son: 1) la adquisición de conocimiento desde unos expertos u otras fuentes, 2) la representación y almacenamiento de ese conocimiento en un ordenador, 3) la realización de inferencias y razonamiento basado en dicho conocimiento y, 4) la transmisión al medio o al usuario las conclusiones obtenidas. Por tanto el sistema debe constar esencialmente de los siguientes componentes: la base de conocimientos, el motor de inferencias, el subsistema de interacción y el módulo de adquisición de conocimiento. La base de conocimientos contendrá el conocimiento necesario para entender, formular y resolver el problema. Incluye el conocimiento experto y puede estructurarse en una o varias componentes de diversos tipos como: base de conocimiento experto, base de reglas (heurísticas), base de datos, sistema de preferencias, etc. El motor de inferencia, es el encargado de ejecutar los mecanismos de inferencia para obtener las conclusiones que permitan afrontar el problema. El sistema debe estar dotado de un módulo de explicación o justificación del razonamiento aplicado (almacenada en una memoria intermedia sólo para el caso en que sea demandada). El módulo de interacción, o interface, es la componente que se ocupa de los intercambios de información con el exterior que comprende la interacción con el experto y la recepción autónoma de información. Constaría de varios elementos como: interface de diálogo, representaciones gráficas y submódulo de explicaciones. Contará con dispositivos de tratamiento de lenguaje natural y sistemas de menús con producción de gráficas o informes para aportar información con distinto grado de detalle. El sistema de adquisición de conocimiento es la componente que se encarga de actualizar de forma consistente la base de conocimientos. Debe estar capacitado para adquirir el conocimiento de distintas fuentes: un experto, una base de datos, la propia experiencia, textos, gráficas, etc.

4 SISTEMAS RELACIONALES DE PREFERENCIAS

Introducción

Los Sistemas Relacionales de Preferencias (SRP) son modelos de preferencias compuestos por relaciones binarias. El sistema relacional simple de preferencias lo componen tres relaciones binarias: la preferencia, la indiferencia y la incomparabilidad. Un Sistema Relacional Preferencias Graduales (SRPG) comprende una serie de relaciones graduales de preferencias que corresponden a diferentes grados en la apreciación de la preferencia. El conjunto de relaciones graduales de preferencia diferentes viene dado por los requerimientos del decisor al expresar sus sentimientos sobre las alternativas; al usar términos como *muy* preferida, *algo* preferida, *poco* preferida, etc. Las alternativas cerradas usuales al expresar opiniones del tipo *muy*, *bastante*, *algo* o *casi* que se emplean en muchas situaciones dan lugar a este tipo de sistemas. Las diferentes graduaciones en las preferencias se manifiestan usando términos lingüísticos difusos. Al aplicar la metodología de las técnicas *fuzzy* o difusas el modelo se convierte en un SRP con apreciaciones lingüísticas difusas de las preferencias o Sistema Relacional de Preferencias Graduales Difusas (SRPGD). Un sistema de preferencias es completo si no se contempla la incomparabilidad.

Sea A un conjunto de alternativas en el sentido más genérico. Sus elementos pueden ser objetos materiales, cantidades monetarias o de cualquier otro bien económico, candidatos, ruidos, condiciones sociales, enfermedades, tiempo, recursos o incluso la combinación de varios de ellos. Una relación binaria R sobre A describe la existencia de una propiedad de conexión entre pares de alternativas. Por tanto, $\forall a, b \in A$, aRb denota que la alternativa a está relacionada por R con la alternativa b . Las relaciones binarias sobre un conjunto base A se pueden definir formalmente como subconjuntos del producto cartesiano $A \times A$. La notación de la teoría de conjuntos facilita la expresión de algunas propiedades o condiciones.

La representación y codificación de las relaciones binarias son fundamentales para su manipulación e interpretación. En este contexto son muy útiles las representaciones matriciales mediante tablas y las representaciones gráficas mediante grafos dirigidos. El grafo asociado $G(R)$ representativo de una relación binaria R se obtiene identificando las alternativas con los nodos o vértices del grafo e incluyendo los arcos dirigidos entre cada dos vértices relacionados. Las relaciones simétricas pueden representarse por grafos no dirigidos y en las que se asume la reflexividad se pueden obviar los bucles. Otras simplificaciones surgen al aprovechar la transitividad para evitar una representación muy recargada. La matriz $M(R)$ asociada a la relación R se obtiene al ordenar las alternativas e identificarlas con las filas y columnas de la matriz binaria que toma el valor 1 si la alternativa correspondiente a la fila está relacionada con la correspondiente a la columna. Formalmente, si a_1, a_2, \dots, a_n es la ordenación de las alternativas, la matriz asociada queda definida por $m_{ij}(R) = 1$ si y sólo si $a_i R a_j$. La matriz se muestra en forma de tabla identificando las alternativas correspondientes a cada fila y columna. Con una adecuada ordenación de las filas y columnas las diversas estructuras del sistema se reflejan claramente en la matriz correspondiente.

Sistemas Relacionales de Preferencias Simples.

Un sistema relacional de preferencias simple consiste en tres relaciones binarias sobre el conjunto A de alternativas: la relación de preferencia denotada P , la relación de indiferencia denotada I y la relación de incomparabilidad denotada X .

Definición Un sistema relacional de preferencias simple (SRPS) sobre A es una terna $S = (I, P, X)$ exhaustiva de relaciones binarias mutuamente exclusivas sobre A , tales que P es antisimétrica, I es reflexiva, e I y X son simétricas.

La relación característica de un SRPS es $C = P \cup I$; a partir de ella se determinan las relaciones del sistema. El sistema es completo si $X = \emptyset$ y entonces la relación P también caracteriza al sistema. La estructura de un SRPS se define usando transitividad mixta; estas propiedades vienen dadas por condiciones para concluir aPb de una cadena del tipo $aCxCy \dots zCb$.

Definición El SRPS $S = (I, P, X)$ tiene estructura de orden de intervalo si y sólo si $P \dots C \dots P \Rightarrow P$, cuando no hay dos I consecutivas. El SRPS $S = (I, P, X)$ tiene estructura de semiorden si y sólo si $C \dots C \Rightarrow P$, cuando hay más P que I .

Los conjuntos de implicaciones esenciales que caracterizan estas estructuras se obtienen de las cadenas más simples contempladas en las correspondientes propiedades de transitividad mixta.

Teorema La única implicación esencial de la estructura de orden de intervalo es $PIP \Rightarrow P$. Las implicaciones esenciales de la estructura de semiorden son: $PIP \Rightarrow P$, $PPI \Rightarrow P$ y $IPP \Rightarrow P$.

Un soporte de umbral de un SRPS consiste en un par de funciones sobre el conjunto A de alternativas: una función valor v , que da la valoración de las alternativas, y una función umbral u , que establece el umbral de la indiferencia a la preferencia. El umbral se puede concebir de dos maneras para cada alternativa a : como la valoración que deben sobrepasar las alternativas para ser preferibles a a , o la valoración por debajo de la que se encuentran las alternativas a las que a es preferida. De esta forma surgen el soporte de umbral superior y el soporte de umbral inferior.

Definición Un soporte de umbral superior de un SRPS $S = (I, P, X)$ es un par de funciones $s = (v, u)$ sobre A tales que, $\forall a, b \in A$, aPb si y sólo si $v(a) > u(b)$. Un soporte de umbral inferior de un SRPS $S = (I, P, X)$ es un par de funciones $s = (v, u)$ sobre A tales que, $\forall a, b \in A$, aPb si y sólo si $v(b) < u(a)$.

Con un soporte de umbral superior se tiene aIb si y sólo si $v(a) \leq u(b)$ y $v(b) \leq u(a)$, $\forall a, b \in A$. Si el umbral es inferior aIb si y sólo si $v(a) \geq u(b)$ y $v(b) \geq u(a)$, $\forall a, b \in A$. El par de funciones (v, u) constituye un soporte de umbral superior de un sistema $S = (I, P)$ si y sólo si (u, v) constituye un soporte de umbral inferior de S . Por tanto los papeles de las funciones u y v son intercambiables, por lo que no cabe distinguir entre ambos tipos de soporte de umbral en los SRPS. Sin embargo esto no ocurre con los sistemas graduales o difusos. Todo sistema relacional de preferencias con soporte es completo; la incomparabilidad sólo estaría presente en el proceso de modelización mientras alguna de las funciones no estuviera completamente disponible, porque no ha sido aún evaluada.

Las propiedades del soporte pueden determinar la estructura de un sistema relacional de preferencias. Para un conjunto finito de alternativas, la existencia de un soporte es también una condición necesaria para la correspondiente estructura.

Teorema Sea $S = (I, P)$ un sistema relacional simple de preferencias completo en A . $S = (I, P)$ es un orden de intervalo si y sólo si tiene un soporte (v, u) donde el umbral u es función de la valoración v . $S = (I, P)$ es un semiorden si y sólo si tiene un soporte (v, u) donde el umbral es función monótona de la valoración v .

Conviene expresar formalmente estos conceptos. Sean f y g dos funciones sobre un conjunto A . La función f es una función de g si y sólo si $g(a) = g(b) \Rightarrow f(a) = f(b), \forall a, b \in A$. La función f es una función monótona de g si y sólo si, $\forall a, b \in A, g(a) \leq g(b) \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. De aquí se obtiene que f es función monótona de g si y sólo si g es función monótona de f .

Sistemas Relacionales de Preferencias Graduales.

El modelo clásico de preferencias se extiende admitiendo que, cuando se opta por la preferencia, se selecciona el grado de preferencia entre m de intensidades crecientes de preferencia. El grado de la preferencia se denota por un índice k que varía desde $k = 1$, para la menor intensidad, hasta $k = m$, que corresponde al máximo grado de preferencia considerado. Un Sistema Relacional de Preferencias Graduales (SRPG) incluye, además de las relaciones de incomparabilidad y de indiferencia, una serie de relaciones de preferencias graduales. Los diferentes grados se manifiestan usando términos lingüísticos para la preferencia tales como preferencia ligera, preferencia débil, preferencia fuerte, preferencia estricta o preferencia total. El número de relaciones graduales de preferencia diferentes viene dado por los requerimientos del decisor al expresar sus apreciaciones sobre preferencias entre alternativas. Las opciones cerradas usuales al expresar opiniones del tipo *muy*, *bastante*, *algo* o *casi*, que se emplean en muchos formularios dan lugar a este tipo de sistemas. Por ejemplo, si las preferencias sobre dos alternativas a y b se manifiestan marcando la opción elegida entre:

- La alternativa a es muy preferible a b .
- La alternativa a es bastante preferible a b .
- La alternativa a es algo preferible a b .
- Las alternativas a y b son indiferentes.
- La alternativa b es algo preferible a a .
- La alternativa b es bastante preferible a a .
- La alternativa b es muy preferible a a .

Formalmente, un SRPG comprende $m+2$ relaciones: la indiferencia absoluta I , m preferencias graduales $Q_k, k = 1, \dots, m$ con grado de preferencia creciente y la incomparabilidad X . Estas $m+2$ relaciones constituyen un conjunto de relaciones exhaustivas y mutuamente exclusivas en el sentido de que para cada dos alternativas a y b , sólo se da una de las $2m+2$ posibilidades siguientes: $aQ_m b, aQ_{m-1} b, \dots, aQ_2 b, aQ_1 b, aIb (=bIa), bQ_1 a, bQ_2 a, \dots, bQ_m a$ y $aXb (=bXa)$.

Definición Un Sistema Relacional Preferencias Graduales (SRPG) $S = (I, Q_1, Q_2, \dots, Q_m, X)$ sobre A se define como un SRP consistente en una serie exhaustiva de $m+2$ relaciones binarias mutuamente exclusivas sobre A , tales que la relación I es reflexiva, I y X son simétricas y cada una de las relaciones $Q_k, k = 1, \dots, m$, es antisimétrica.

Un SRPG S comprende una serie de m SRPS anidados. Estos sistemas se obtienen, para cada $k = 1, \dots, m$, uniendo las $k-1$ relaciones de preferencias graduales de menor grado a la indiferencia para constituir la k -ésima relación de indiferencia extendida I_k y uniendo las $m-k+1$ restantes preferencias graduales en la k -ésima relación de preferencia extendida P_k . Los SRPS asociados son los sistemas $S_k = (I_k, P_k, X)$ con relaciones características C_k , para $k = 1, \dots, m$. Un SRPG completo S incluye tres series de m relaciones binarias: la serie de relaciones asimétricas y mutuamente exclusivas (Q_1, Q_2, \dots, Q_m) , la serie de relaciones asimétricas anidadas $(P_1, P_2, \dots, P_{m-1})$, y la serie de relaciones lineales anidadas $(C_1, C_2, \dots, C_{m-1})$. El sistema puede venir caracterizado por cada una de estas tres series.

La estructura de un SRPG viene dada por el número de relaciones graduales y las propiedades que cumplen. Usando transitividades mixta se definen las estructuras de orden de intervalo gradual y de semiorden gradual para SRPG. Estas propiedades de transitividad mixta involucran a distintos grados de preferencia. Los sistemas relacionales simples de preferencias asociados a un orden de intervalo gradual tienen estructura de orden de intervalo y los asociados con un semiorden gradual tienen estructura de semiorden. Una transitividad mixta de un SRPG es un conjunto de condiciones para concluir $aP_k b$ a partir una cadena de relaciones del tipo $aC_j \dots C_j b$, con $j \leq k$. Una cadena $aC_j \dots C_j b$ se define formalmente como una secuencia finita de alternativas x_0, x_1, \dots, x_n tal que $x_{i-1} C_j x_i, i = 1, \dots, n$ donde $x_0 = a$ y $x_n = b$.

Definición Un SRPG S tiene estructura de *Orden de Intervalo Gradual* si y sólo si, $\forall j, k$, con $1 \leq j \leq k \leq m$, de una cadena $aC_j \dots C_k b$ con algún P_k que no empieza ni acaba con I_j y que no tiene dos I_j consecutivos, se deduce $aP_k b$, $\forall a, b \in A$. Un SRPG S tiene estructura de *Semiorden Gradual* si y sólo si, $\forall j, k$, con $1 \leq j \leq k \leq m$, de una cadena $aC_j \dots C_k b$ con algún P_k que no empieza o no acaba con I_j y tiene más P_j que I_j , se deduce $aP_k b$, $\forall a, b \in A$.

Un SRPG se puede establecer utilizando un *soporte* de valor-umbral que consta de una valoración y umbrales de preferencia. Las preferencias se obtienen fijando, para cada alternativa, además de su valoración, los umbrales para cada grado de preferencia. Análogamente a los SRPS, se pueden considerar umbrales superiores e inferiores en el soporte.

Definición. Un *soporte de umbrales superiores* de un SRPG completo S es un par $s = (v, u)$ formado por una valoración v y una m -upla $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ de umbrales tales que, $\forall a, b \in A$, y $\forall k = 1, \dots, m$, $aP_k b$ si y sólo si $v(a) > u_k(b)$. Un *soporte de umbrales inferiores* de un SRPG completo S es un par $s = (v, u)$ formado por una valoración v y una m -upla $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$ de umbrales tales que, $\forall a, b \in A$, y $\forall k = 1, \dots, m$, $aP_k b$ si y sólo si $v(a) > u^k(b)$.

Las propiedades del soporte determinan la estructura de un sistema relacional de preferencias. Para un conjunto finito de alternativas, la existencia de tal soporte es también una condición necesaria para la correspondiente estructura.

Teorema. El SRPG completo S tiene estructura de orden de intervalo gradual si y sólo si existen tanto un soporte de umbrales superiores $s = (v, (u_1, u_2, \dots, u_m))$ como un soporte de umbrales inferiores $s' = (w, (u^1, u^2, \dots, u^m))$ donde cada umbral es función de la valoración correspondiente. El SRPG completo S tiene estructura de semiorden gradual si y sólo si existen tanto un soporte de umbrales superiores $s = (v, (u_1, u_2, \dots, u_m))$ como un soporte de umbrales inferiores $s' = (w, (u^1, u^2, \dots, u^m))$ donde cada umbral es función monótona de la valoración correspondiente.

Para garantizar la estructura de orden de intervalo gradual es necesaria la existencia de ambos soportes de umbrales. Sin embargo para la estructura de semiorden es suficiente la existencia de uno de los umbrales con la propiedad correspondiente. Para obtener los soportes de los SRPG con estas estructuras se consideran las inclusiones entre los conjuntos de alternativas preferibles y preferidas a los distintos grados de preferencia. Para cada alternativa a y para cada grado de preferencia k sean respectivamente $P_k[a]$ y $C_k[a]$ los conjuntos de alternativas preferidas o preferibles a la alternativa a con nivel k definidos por: $P_k[a] = \{x \in A : aP_k x\}$ y $C_k[a] = \{x \in A : aP_k x\}$, $\forall a \in A, k = 1, \dots, m$.

Proposición Si S es un orden de intervalo gradual entonces, $\forall a, b \in A$:

Se da una de las dos condiciones siguientes: 1) $P_k[a] \subseteq P_k[b]$, $\forall k = 1, \dots, m$, 2) $P_k[b] \subseteq P_k[a]$, $\forall k = 1, \dots, m$.

Se da una de las dos condiciones siguientes: 1) $C_k[a] \subseteq C_k[b]$, $\forall k = 1, \dots, m$, 2) $C_k[b] \subseteq C_k[a]$, $\forall k = 1, \dots, m$.

Proposición. Si S es un semiorden gradual entonces, $\forall a, b \in A$, se da una de las dos condiciones siguientes:

1) $P_k[a] \subseteq P_k[b]$ y $C_k[a] \subseteq C_k[b]$, $\forall k = 1, \dots, m$. 2) $P_k[b] \subseteq P_k[a]$ y $C_k[b] \subseteq C_k[a]$, $\forall k = 1, \dots, m$.

Para un SRPG se define la relación de equivalencia E que determina las alternativas entre las que el sistema no hace distinción. Se define $\forall a, b \in A$, aEb si y sólo si $P_k[a] = P_k[b]$ y $C_k[a] = C_k[b]$, $\forall k = 1, \dots, m$. Para obtener los soportes de umbrales superiores de un SRPG se usa el sistema simple canónico superior (E, F^+) definido, $\forall a, b \in A$, por $aF^+ b$ si y sólo si $P_k[a] \subset P_k[b]$ para algún $k = 1, \dots, m$, o $P_k[a] = P_k[b]$, $\forall k = 1, \dots, m$ y $C_k[a] \subset C_k[b]$ para algún $k = 1, \dots, m$.

Proposición Si el sistema relacional gradual completo S tiene estructura de orden de intervalo gradual entonces el sistema canónico superior (E, F^+) tiene estructura de preorden completo.

El soporte de umbrales superiores se obtiene tomando, $\forall a \in A$, la valoración $v(a) = |F^+|$ y, $\forall k = 1, \dots, m$, el umbral $u_k(a) = \min \{v(x) : x \in P_k[a]\}$. En los soportes de umbrales superiores construidos de esta forma los umbrales son funciones de la valoración y si el sistema tiene estructura de semiorden son funciones monótonas de la valoración. Los umbrales inferiores se obtiene de forma similar usando el sistema canónico inferior (E, F^-) definido, $\forall a, b \in A$, por $aF^- b$ si y sólo si $C_k[a] \subset C_k[b]$ para algún $\forall k = 1, \dots, m$, o $C_k[a] = C_k[b]$, $\forall k = 1, \dots, m$ y $P_k[a] \subset P_k[b]$ para algún $\forall k = 1, \dots, m$. Se toma la valoración $v(a) = |F^-|$ y los umbrales $u^k(a) = \max \{v(x) : a \in P_k[x]\}$. Estos umbrales inferiores resultan funciones de la valoración que en el caso del semiorden son funciones monótonas de la valoración

Sistemas Relacionales de Preferencias Difusas

Una variable lingüística se diferencia de una numérica en que sus valores no son números sino palabras o términos de un lenguaje natural o artificial (ver [14]). El uso de términos lingüísticos difusos en la manifestación de preferencias da

lugar a relaciones binarias difusas lingüísticas (ver [2], [4]). Si en las apreciaciones del grado de preferencias el experto utiliza términos lingüísticos difusos se obtiene el SRP con apreciaciones lingüísticas difusas. Consideramos la teoría de los conjuntos ordinales *L-fuzzy* de Goguen [3] para formalizar estos modelos y aplicar la metodología de las técnicas difusas o *fuzzy* para extender los resultados anteriores,

El modelo obtenido respeta el principio de extensión de la teoría de los conjuntos difusos al coincidir en el caso *crisp* con los modelos y resultados no difusos. Los *Sistemas Relacionales de Preferencias Difusas* (SRPD) se definen al considerar apreciaciones difusas del grado de preferencia en las comparaciones por pares. Las transitividades restringidas para relaciones difusas proporcionan estructuras que generalizan las estructuras de los sistemas no difusos de semiorden y orden de intervalo. Se introduce el soporte o representación funcional utilizando valoraciones difusas lingüísticas donde las propiedades de monotonía del soporte o la representación permiten caracterizar las estructuras de semiorden y orden de intervalo. Los conjuntos de alternativas preferidas y preferibles permiten construir un preorden canónico y obtener la representación funcional lingüística.

Un sistema relacional simple completo $S = (I, P)$ sobre un conjunto A puede modelizarse por una función de preferencia $p: A \times A \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ que verifica $p(a, b) = -p(b, a)$, $\forall a, b \in A$. La condición $p(a, b) = 1$ significa aPb , $p(a, b) = 0$ es alb y $p(a, b) = -1$ significa bPa ; e inversamente. La asimetría de P corresponde a la condición $p(a, b) = -p(b, a)$, $\forall a, b \in A$.

Sea K el conjunto totalmente ordenado de los términos lingüísticos difusos que expresan las preferencias de un experto. El caso *crisp* aparece cuando K tiene sólo un término. Sea $K^* = K \cup \{0\} \cup -K$ donde $-K = \{-k: k \in K\}$. Una relación binaria difusa sobre A con el conjunto de términos K es una función $r: A \times A \rightarrow K^*$. La relación binaria r es asimétrica si $r(a, b) = -r(b, a)$, $\forall a, b \in A$. Aquí, si $j = -k$ entonces $k = -j$, $\forall j, k \in K^*$ y $k = -k$ si y sólo si $k = 0$. Denotemos por \leq al orden sobre K y por $<$ a la correspondiente parte asimétrica de \leq . Consideremos en K^* el orden completo dado por: si $j < k$ entonces $-k < -j < 0 < j < k$, $\forall j, k \in K$. Una preferencia difusa se modeliza por una relación difusa asimétrica.

Definición Una *preferencia difusa lingüística* en el conjunto de términos K sobre el conjunto de alternativas A es una función $p: A \times A \rightarrow K^*$ que verifica $p(a, b) = -p(b, a)$, $\forall a, b \in A$.

Una preferencia difusa da lugar a las relaciones binarias Q_k correspondiente a cada término k , $k \in K^*$. La relación Q_k viene dada, $\forall a, b \in A$, por: $aQ_k b \Leftrightarrow p(a, b) = k$. Para cada término $k \in K^*$, el k -corte de p es la relación de preferencias no difusas $P_k = \cup \{Q_j, j > k\}$ dada, $\forall a, b \in A$, por $aP_k b \Leftrightarrow p(a, b) > k$. La correspondiente relación de indiferencia I_k , para cada término $k \in K^*$, viene dada, $\forall a, b \in A$, por $aI_k b \Leftrightarrow |p(a, b)| \leq k$. Aquí es $|k| = k$ si $k > 0$ y $|k| = -k$ si $k < 0$. Por lo tanto, $I_k = \cup \{Q_j, |j| \leq k\}$. La relación alb corresponde a la apreciación de que a es absolutamente indiferente a b . La indiferencia absoluta viene dada, $\forall a, b \in A$, por: $alb \Leftrightarrow p(a, b) = 0$, y coincide con I_0 y con Q_0 .

Transitividad Difusa

La transitividad es fundamental en la modelización de preferencias. La preferencia no difusa se suele suponer transitiva, pero no la indiferencia. La indiferencia es transitiva sólo es los modelos más primitivos, los preórdenes. Los órdenes de intervalo y los semiórdenes son modelos intermedios. Para aplicar formalmente la transitividad a preferencias difusas podemos considerar la forma restringida o no restringida de definir la transitividad de las relaciones binarias difusas. La transitividad no restringida se define como sigue:

Definición Una relación binaria difusa r sobre un conjunto de alternativas A verifica la *transitividad no restringida* si y sólo si, $\forall a, b \in A$ es: $r(a, b) \geq \max \{r(a, x), r(x, b)\}$, $\forall x \in A$.

Aplicando esta propiedad a una función de preferencia *crisp* p (donde $m = 1$), se obtiene que la relación de preferencia es transitiva; ya que, $\forall a, b \in A$, $p(a, x) = 1, p(x, b) = 1 \Rightarrow p(a, b) = 1; \forall x \in A$. Sin embargo, también implica la transitividad de la indiferencia. Restringiendo en la propiedad anterior las cadenas $a \rightarrow x \rightarrow b$ que acotan la relación entre a y b , se surgen diversos tipos de transitividad restringida. Por ejemplo, la *transitividad positiva* se obtiene al restringir las cadenas $a \rightarrow x \rightarrow b$ por $r(a, x) > 0$ y $r(x, b) > 0$.

Definición Sea r una relación binaria difusa sobre A . La relación r es *positivamente transitiva* si y sólo si, $\forall a, b \in A$, tenemos: $r(a, b) \geq \max \{r(a, x), r(x, b)\}$, $\forall x \in A$ tal que $\min \{r(a, x), r(x, b)\} > 0$.

Aplicando esta transitividad a una preferencia *crisp* p volvemos a obtener la transitividad de la relación de preferencia, pero no la de la indiferencia. Consideremos entonces la *transitividad no negativa* que se obtiene al restringir las cadenas $a \rightarrow x \rightarrow b$ por $r(a, x) \geq 0$ y $r(x, b) \geq 0$. Es decir:

Definición Sea r una relación binaria difusa sobre A . La relación r es *no negativamente transitiva* si y sólo si, $\forall a, b \in A$, tenemos: $r(a, b) \geq \max \{r(a, x), r(x, b)\}$, $\forall x \in A$ tal que $\min \{r(a, x), r(x, b)\} \geq 0$.

Aplicando este concepto a una preferencia *crisp* volvemos a obtener la transitividad de la preferencia y de la indiferencia. Por tanto, estas transitividades restringidas extienden las nociones de preferencia transitiva y de preorden a las preferencias difusas lingüísticas.

Definición La preferencia difusa lingüística p sobre el conjunto A es *transitiva difusa* si y sólo si, $\forall a, b \in A$, verifica: $p(a, b) \geq \max \{p(a, x), p(x, b)\}$, $\forall x \in A$ tal que $\min \{p(a, x), p(x, b)\} > 0$.

Definición La preferencia difusa lingüística p sobre el conjunto A es un *preorden difuso* si y sólo si, $\forall a, b \in A$, verifica: $p(a, b) \geq \max \{p(a, x), p(x, b)\}$, $\forall x \in A$ tal que $\min \{p(a, x), p(x, b)\} \geq 0$.

Semiorden y orden de intervalo difusos

Las estructuras de semiorden y de orden de intervalo de un sistema relacional simple completo se puede caracterizar en términos exclusivamente de la relación de preferencia, ya que caracteriza el sistema.

Proposición El sistema simple completo $S = (I, P)$ tiene estructura de orden de intervalo si y sólo si, $\forall a, b \in A$, si existen $x, y \in A$ tales que aPx , no yPx y yPb entonces aPb .

En términos de una función de preferencia *crisp* p esta proposición significa que si $p(a, x) = 1$, $p(x, y) \geq 0$ y $p(y, b) = 1$ entonces $p(a, b) = 1$. Por tanto, la restricción sobre la cadena $a \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow b$ para inferir $p(a, b) = 1$ puede también expresarse en los siguientes términos. La función de preferencia p verifica, $\forall a, b \in A$, que: $p(a, b) \geq \max \{p(a, x), p(y, b)\}$, $\forall x, y \in A$ tal que $\min \{p(a, x), p(y, b)\} > \max \{0, p(y, x)\}$. Por tanto se define así el orden de intervalo difuso.

Definición La preferencia difusa lingüística p sobre el conjunto A es un *orden de intervalo difuso* si y sólo si, $\forall a, b \in A$, verifica: $p(a, b) \geq \max \{p(a, x), p(y, b)\}$, $\forall x, y \in A$ tal que $\min \{p(a, x), p(y, b)\} > \max \{0, p(y, x)\}$.

Proposición El sistema simple completo $S = (I, P)$ tiene estructura de semiorden si y sólo si, además de tener la estructura de orden de intervalo, se verifican las dos condiciones siguientes, $\forall a, b \in A$. Si existen $x, y \in A$ tales que no xPa , xPy e yPb entonces aPb . $\forall a, b \in A$. Si existen $x, y \in A$ tales que aPx , xPy y no bPy entonces aPb .

Estas condiciones equivalen a las siguientes para una función de preferencia *crisp*. Si $p(a, x) = 1$, $p(x, y) = 1$ y $p(y, b) \geq 0$ entonces $p(a, b) = 1$; y si $p(a, x) \geq 0$, $p(x, y) = 1$ y $p(y, b) = 1$ entonces $p(a, b) = 1$. Por tanto definimos el semiorden por:

Definición La preferencia difusa lingüística p sobre A es un *semiorden difuso* si y sólo si, $\forall a, b \in A$, se verifican las dos condiciones siguientes. 1) $p(a, b) \geq \max \{p(a, x), p(y, b)\}$, $\forall x, y \in A$ tales que $\min \{p(a, x), p(y, b)\} > \max \{0, p(y, x)\}$. 2) $p(a, b) \geq \max \{p(a, x), p(y, b)\}$, $\forall x, y \in A$ tales que $p(x, y) > \max \{0, p(x, a), p(b, y)\}$.

Estas transitividades, en términos de los k -cortes ($P_k: k \in K^*$) de la preferencia p , son implicaciones esenciales

Teorema La preferencia p es un orden de intervalo si y sólo si, $\forall j \leq k \in K^*: P_j P_{1-j} P_k \Rightarrow P_k$ y $P_k P_{1-j} P_j \Rightarrow P_k$. La preferencia p es un semiorden si y sólo si, además, $\forall j \leq k \in K^*: P_k P_j P_{1-j} \Rightarrow P_k$ y $P_{1-j} P_j P_k \Rightarrow P_k$.

Si restringimos los términos a un subconjunto finito de K que denotamos $\{0, 1, \dots, m-1\}$ estas condiciones coinciden con las implicaciones esenciales de los semiórdenes y órdenes de intervalo de los SRPG.

Soporte funcional

Al adoptar soportes en modelos difusos las valoraciones de las alternativas vendrán dados por términos lingüísticos difusos en lugar de por valores numéricos precisos (ver [14]). Sea L el conjunto totalmente ordenado de los términos lingüísticos usados para expresar las apreciaciones de los expertos sobre las valoraciones de las alternativas. Estos términos pueden ser, por ejemplo, del tipo de *bueno, malo, muy bueno, no muy malo*, etc.

Definición Una función de *valoración lingüística difusa* de A sobre L es una función $v: A \rightarrow L$.

Una forma racional de apreciar preferencias entre pares de alternativas consiste en elegir los términos lingüísticos a partir de las valoraciones de las alternativas. Por tanto, se considera, además de la función de valoración difusa v una función de preferencia sobre los términos lingüísticos de las valoraciones; es decir una función $\pi: L \times L \rightarrow K$.

Definición Un *soporte lingüístico difuso* (v, π) de la preferencia difusa p consiste en una función de valoración difusa

lingüística $v: A \rightarrow L$ y una función de preferencia difusa $\pi: L \times L \rightarrow K$ sobre las valoraciones de las alternativas tales que, $\forall a, b \in A: p(a, b) = \pi(v(a), v(b))$.

Semiórdenes y órdenes de intervalo soportados.

La monotonía de una función de preferencia π con respecto a la valoración v puede expresarse ahora de dos formas. La función de preferencia π es *monótona por la izquierda* si, $\forall a, b \in A, v(a) \leq v(b) \Rightarrow \pi(v(a), v(x)) \leq \pi(v(b), v(x)), \forall x \in A$. La función de preferencia π es *monótona por la derecha* si, $\forall a, b \in A, v(a) \leq v(b) \Rightarrow \pi(v(x), v(a)) \geq \pi(v(x), v(b)), \forall x \in A$. El siguiente teorema proporciona las propiedades del soporte funcional que caracterizan la estructura de orden de intervalo de un sistema de preferencia difuso lingüístico.

Teorema Una preferencia difusa p lingüística es un orden de intervalo si tiene, tanto un soporte funcional (v, π) donde la función de preferencia π es monótona por la izquierda, como un soporte funcional (v, π) donde la función de preferencia π es monótona por la derecha. Una preferencia difusa p lingüística es un semiorden si tiene un soporte funcional (v, π) donde la función de preferencia π es, a la vez, monótona por la izquierda y monótona por la derecha.

Conclusiones

El desarrollo de los sistemas inteligentes se realiza de forma iterativa incorporando progresivamente nuevas capacidades o extendiendo de las que ya disponen. La línea de integración de los DSS y los ES más prometedora se orienta hacia la incorporación en un mismo sistemas de las capacidades de ambos tipos de sistemas. El aspecto fundamental de estos sistemas es el tratamiento inteligente del conocimiento experto sobre las alternativas para asistir en la toma de decisiones convirtiéndose en un Sistema Inteligente de Ayuda a la Decisión basado en Conocimiento Experto. Los Sistemas Relacionales de Preferencias constituyen modelos ajustados al razonamiento humano que se pueden tratar eficientemente con las herramientas formales para las matrices y los grafos. Las apreciaciones lingüísticas difusas de los expertos son tratadas formalmente en estos modelos sin necesidad de utilizar un aparato matemático más sofisticado que las relaciones binarias. Las estructuras de orden de intervalo y semiorden se extienden a estos modelos respetando el principio de extensión de la teoría de las técnicas *fuzzy* o los conjuntos difusos.

Una misma estructura de un sistema relacional de preferencias puede venir dadas de diferentes formas equivalentes, cada una de ellas puede entonces jugar el papel de definición y las demás serían caracterizaciones. La noción de cada estructura viene dado por las propiedades que son válidas para los sistemas; poco importa en su aplicación cuales forman parte de la definición y cuales son consecuencia de la propia definición. La opción adoptada dependerá de la perspectiva considerada. Desde el punto de vista matemático es conveniente que la definición incluya los axiomas más débiles posibles; desde el punto de vista de un tipo concreto de aplicaciones, la definición debe enunciarse en términos de los conceptos y herramientas usuales. Para la ayuda a la decisión, la mejor definición sería la más naturalmente interpretable por los posibles usuarios del modelo. En los textos clásicos (ver, por ejemplo, [10], [11], [13]) se considera, además de la valoración denotada por g , un umbral q para la diferencia de las valoraciones que se hace depender de la valoración de la alternativa preferida (aPb si y sólo si $g(a) - g(b) > q(g(b))$). Sin embargo con esta notación es imprescindible al menos establecer la diferencia entre las valoraciones de las alternativas a y b para luego aplicar los umbrales. Sin embargo, con nuestro modelo para los sistemas graduales basta con establecer una ordenación entre las valoraciones, lo que es factible si son términos lingüísticos difusos.

Los sistemas relacionales de preferencias con apreciaciones lingüísticas difusas incorporan las técnicas difusas a la modelización de preferencias. Aunque, se puede suponer que los expertos sólo contemplarán un conjunto finito K de términos lingüísticos para expresar preferencias o valoraciones, se puede sustituir el intervalo discreto de variación $[-k, k]$ por un intervalo continuo como $[-1, 1]$.

REFERENCIAS

1. Adelman, L. *Evaluating Decision Support and Expert Systems*. Wiley, 1992.
2. Delgado, M., Verdegay J.L. and Vila, M.A. On aggregation Operations of Linguistic Labels, *International Journal of Intelligent Systems*, Vol. 8, (1993) pp.351–370.
3. Goguen J.A.. L-fuzzy Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 18 (1967)
4. Herrera, F., Herrera-Viedma E. and Verdegay J.L. A Model of Consensus in Group Decision Making under Linguistic Assessments, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 78, (1996). pp.73–87.
5. Klein, M.; Methie, L.B. *Knowledge-Based Decision Support Systems*. Wiley, 1995.

6. Moreno J.A. A transitivity approach to preference relational systems, *European Journal of Operational Research*, Vol. 60, (1992). pp.68–75.
7. Moreno J.A. Preference Modelling: The transitivity in Preference Relational Systems, *International ICSC Symposium on Engineering of Intelligent Systems EIS'98*. ICSC Academic Press ISBN #3–906454–11–8. (1998). pp. 743–749.
8. Moreno J.A. Semiorder and Interval Order Structures for Linguistic Assessed Fuzzy Preferences. Submitted to *Fuzzy Sets and Systems*, 2001.
9. Pirlot M., and Vincke Ph.. *Semiorders*, Kluwer, Springer Verlag, 1997.
10. Roubens M., and Vincke Ph. *Preference Modelling*, New York, Springer Verlag, 1985.
11. Roy, B. *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*, Paris, Economica, Paris, 1985.
12. Turban, E. *Decision Support and Expert Systems: Management Support Systems*. Macmillan, 1994.
13. Vincke Ph. *Multicriteria Decision-Aid*, Wiley, 1992.
14. Zadeh L. The Concept of a Linguistic Variable and its Applications to Approximate Reasoning. Part I, *Information Sciences*, Vol. 8, (1975). pp.199–249. Part II, *Information Sciences*, 8, (1975). pp.301–357. Part III, *Information Sciences*, 9, (1975). pp.43–80.