# Sistemas Relacionales Múltiples de Preferencias.

José A. Moreno Pérez, J. Marcos Moreno Vega
y Clara M. Campos Rodríguez

**Resumen**

Un Sistema Relacional Múltiple de Preferencias consiste en una serie de relaciones graduales de preferencia, además de la indiferencia y la incomparabilidad. Las estructuras de semiorden múltiple fuerte y débil y de orden de intervalo múltiple se definen por transitividades mixtas (condiciones para que una cadena de relaciones implique una preferencia entre los extremos) y se caracterizan por las correspondientes implicaciones esenciales (las consecuencias más simples de las transitividades mixtas). Un soporte de umbrales consiste en una valoración de las alternativas y una serie de umbrales para las preferencias graduales que determinan el sistema. La estructura de los sistemas completos (donde se excluye la incomparabilidad) para un conjunto finito de alternativas se caracteriza por las propiedades del soporte.

**Resumen**

A multiple preference relacional system consists of a series of graded preference relations in addition to the indifference and the incomparability. The structures of strong and weak multiple semiorden and the multiple interval order are defined by mixed transitivities (conditions under which a chain of relations implies a preference between the extremes) and characterized by the corresponding sets of essential implications (the simplest consequences of the mixed transitivities). A threshold support consists of a value function on the alternatives and a series of threshold for the graded preferences that determine the system. The structures of a complete (the incomparability is excluded) system on a finite alternative set are also characterized by the properties of the support.

*Clasificación AMS:* 62C99, 06A99.
*Palabras Claves:* Modelos de Preferencias. Semiorden. Orden de Intervalo.

## 1. Introducción.

Cualquier decisión debe estar basada en criterios que muestren las **Preferencias** del decisor sobre el conjunto de alternativas. Los **Sistemas de Preferencias** son modelos para formalizar y tratar información sobre preferencias. La forma más directa de mostrar las preferencias es a través de comparaciones por pares. Los **Sistemas Relacionales de Preferencias** son sistemas de preferencias basados en una serie exhaustiva de relaciones binarias mutuamente exclusivas. Las **Relaciones Binarias** son las herramientas matemáticas más apropiadas para modelizar preferencias basadas en comparaciones entre pares de alternativas.

El modelo clásico es el **Sistema Relacional Simple de Preferencias** consistente en tres relaciones binarias: la **Preferencia**, la **Indiferencia** y la **Incomparabilidad**. La preferencia y la indiferencia suelen estar en cualquier modelo de preferencias. La incomparabilidad corresponde a la inexistencia de información suficiente para relacionar las alternativas; el sistema de preferencias es **completo** si no se contempla la incomparabilidad. Las principales estructuras para estos modelos son el preorden, el semiorden y el orden de intervalo que son muy conocidas y han sido ampliamente estudiadas por varios autores.

Este modelo se va extendiendo al introducir relaciones intermedias (ver [8]). El **Sistema Relacional Doble de Preferencias** aparece al incluir sólo una relación intermedia, la semipreferencia o preferencia débil, entre la indiferencia y la preferencia. Varias estructuras de sistemas relacionales dobles de preferencias se han considerado también en la literatura: el casi-orden, el preorden de intervalo, el doble semiorden, el pseudo-orden o el doble orden de intervalo.

Un **Sistema Relacional Múltiple de Preferencias** se obtiene incluyendo, además de la incomparabilidad y la indiferencia, una serie de **relaciones graduales de preferencias**. Estas relaciones corresponden a diferentes grados o intensidades en el sentimiento de preferencia. Tales graduaciones se manifiestan al tener que usar calificativos para la preferencia tales como preferencia ligera, preferencia débil, preferencia fuerte, casi-preferencia, preferencia estricta, preferencia total, etc. El conjunto de relaciones graduales de preferencia diferentes viene dado por los requerimientos del decisor al expresar sus sentimientos sobre las alternativas; al usar términos como muy preferida, algo preferida, poco preferida, etc. Todo sistema relacional múltiple de preferencias tiene una serie de **Sistemas Relacionales Simples de Preferencias Asociados**. Son los que se obtienen uniendo las relaciones graduales de preferencias con mayor grado en una **Relación de Preferencia Extendida** y las restantes en la correspondiente relación de indiferencia extendida. La estructura de un sistema relacional múltiple de preferencias depende de la estructura de estos sistemas asociados y de algunas propiedades de conexión entre ellos.

La **Transitividad** juega un papel muy importante en la modelización de preferencias con relaciones binarias. En la teoría clásica, la propiedad transitiva se impone a la relación de preferencia y a veces a la de indiferencia. La transitividad de la relación de indiferencia es frecuentemente contestada con paradojas realistas de cadenas de indiferencias, donde la primera y última alternativa son claramente no indiferentes. No obstante, dada una cadena de relaciones de preferencia e indiferencia extendidas, parece natural que si los grados de la relaciones de preferencia son significativamente más importantes que los de las indiferencias, entonces exista cierto grado de preferencia entre la primera y última alternativa de la cadena. El grado de la preferencia entre estas alternativas debe ser función del grado, posición y número de las relaciones de preferencia e indiferencia que componen la cadena.

Argumentos de este tipo dan lugar a varias condiciones en las cadenas de preferencias graduales sobre alternativas para poder concluir un cierto grado mínimo de preferencia entre alternativas situadas en los extremos de la cadena. El propósito de estas condiciones es evitar la posibilidad de que dichas alternativas estén cerca de circunstancias de la correspondiente indiferencia extendida. Las propiedades resultantes, similares a la transitividad, se conocen como **Transitividades Mixta**. Una transitividad mixta consiste en condiciones sobre los grados de preferencia en una cadena de relaciones de preferencia y/o indiferencia extendida para poder deducir una preferencia extendida entre la primera y última alternativa de la cadena.

Usando propiedades de transitividad mixta se definen tres **estructuras** de sistemas relacionales múltiples de preferencias: el **orden de intervalo múltiple**, el **semiorden débil múltiple** y el **semiorden fuerte múltiple**. Los sistemas relacionales simples de preferencias asociados a un orden de intervalo múltiple tienen estructura de orden de intervalo y los asociados con un semiorden múltiple débil o fuerte tienen estructura de semiorden. La diferencia entre las estructuras de semiorden múltiple débil y fuerte está en la conexión entre los sistemas simples asociados. Cada estructura viene caracterizada por un conjunto de **implicaciones esenciales**. Las implicaciones esenciales son las condiciones obtenidas al aplicar las transitividades mixtas a las cadenas más cortas por ellas contemplada. Constituyen la caracterización más sencilla de la estructura correspondiente, lo cual es conveniente desde un punto de vista matemático.

Una manera usual de adoptar un sistema de preferencias es usando valoraciones sobre las alternativas y determinando umbrales para los diferentes grados de preferencia. Un **Soporte de Umbrales** de un sistema relacional múltiple de preferencias consiste en una **valoración** de las alternativas y una serie de **umbrales** para los grados de preferencia sobre las alternativas. El grado de preferencia entre dos alternativas se obtiene comparando el valor de la alternativa preferible con los umbrales de la otra alternativa. La incomparabilidad aparece sólo cuando alguna de las correspondientes funciones no está evaluada. La estructura de los sistemas relacionales múltiples completos de preferencias se caracterizan por las propiedades de los soportes de umbrales posibles.

# 2. Sistemas Relacionales de Preferencias Múltiples.

Sea $A$ un conjunto de **Alternativas** en el sentido más genérico. Los elementos de este conjunto pueden ser objetos materiales, cantidades monetarias o de cualquier otro bien económico, candidatos, ruidos, condiciones sociales, enfermedades, tiempo, recursos o incluso la combinación de varios de ellos. Una **Relación Binaria** $R$ sobre $A$ describe la existencia de una propiedad de conexión entre pares de alternativas. $\forall a, b \in A$, $aRb$ denota que la alternativa $a$ está relacionada por $R$ con la alternativa $b$. Las principales propiedades de relaciones binarias sobre un conjunto $A$ son:

(i) **Reflexividad.** $aRa$, $\forall\, a \in A$.
(ii) **Irreflexividad.** no $aRa$, $\forall\, a \in A$.
(iii) **Simetría.** $aRb \Rightarrow bRa$, $\forall\, a, b \in A$.
(iv) **Antisimetría.** $aRb \Rightarrow$ no $bRa$, $\forall\, a, b \in A$.
(v) **Linealidad.** no $aRb \Rightarrow bRa$, $\forall\, a, b \in A$.
(vi) **Transitividad.** $aRbRc \Rightarrow aRc$, $\forall\, a, b, c \in A$.

Algunas operaciones con relaciones binarias son las siguientes.

(i) La **Composición** $R \cdot S$: $aR \cdot Sb$ si y sólo si $\exists c \in A, aRcSb$.
(ii) La **Union** $R \cup S$: $a(R \cup S)b$ si y sólo si $aRb$ o $aSb$.
(iii) La **Intersección** $R \cap S$: $a(R \cap S)b$ si y sólo si $aRb$ y $aSb$.
(iv) La **Inversa** $R^{-1}$: $aR^{-1}b$ si y sólo si $bRa$.
(v) La **Complementaria** $\overline{R}$ es: $a\overline{R}b$ si y sólo si no $aRb$.

Un **Sistema de Decisión** usa la información disponible para determinar la preferencia sobre las alternativas. Para cada par de alternativas, el sistema de decisión dilucida las preferencias eligiendo entre una serie de situaciones posibles: una de las alternativas es preferible, es casi preferible, es semipreferible, son indiferentes, son casi indiferentes, etc. (ver [8]). Estas situaciones dan lugar varias relaciones binarias sobre las alternativas. Las relaciones resultantes constituyen un modelo matemático conocido como **Sistema Relacional de Preferencias**.

El modelo de preferencias de la teoría clásica permite, para cada par de alternativas, elegir entre la **Preferencia** de una de la alternativas y la **Indiferencia** entre ellas. Además es posible que, para un par de alternativas dado, no exista información sobre la posible preferencia y por tanto se da la relación de **Incomparabilidad** entre ellas. Este modelo se extiende admitiendo que, cuando se opta por la preferencia, se selecciona el **grado** de preferencia entre $m$ grados o intensidades crecientes de preferencia. Por tanto, del clásico sistema relacional simple de preferencias compuesto por tres relaciones, se pasa al sistema relacional múltiple de preferencias.

Un sistema relacional múltiple de preferencias comprende $m+2$ relaciones binarias sobre las alternativas: la relación de indiferencia absoluta $I$, $m$ relaciones de preferencia **graduales** $Q_k, k = 1, 2, ..., m$ con intensidad de preferencia creciente y la relación de incomparabilidad $X$. Evidentemente, las relaciones $Q_k$ son antisimétricas pero $I$ y $X$ son simétricas; $I$ es reflexiva pero $X$ es irreflexiva. Con este modelo, para cada dos alternativas $a$ y $b$, hay que optar por una y sólo una de las $2m + 2$ posibilidades siguientes:

$aQ_mb$, $aQ_{m-1}b$, ..., $aQ_2b, aQ_1b$, $aIb$ $(= bIa)$, $bQ_1a$, $bQ_2a$, ..., $bQ_ma$ y $aXb$ $(= bXa)$.

Los sistemas relacionales múltiples de preferencias se pueden modificar en dos direcciones: por un lado, introduciendo nuevas relaciones de preferencia graduales intermedias o descomponiéndolas; por otro lado, excluyendo o eliminando relaciones de preferencia graduales. El propósito de tales modificaciones es permitir una mayor holgura en la especificación de la preferencia para cada par de alternativas y evitar situaciones ambiguas, respectivamente.

**Definición 2.1** *Un* **Sistema Relacional Múltiple de Preferencias** $(I, Q_1, Q_2, ..., Q_m, X)$ *en un conjunto de alternativas $A$ es un sistema relacional de preferencias consistente en una serie exhaustiva de $m+2$ relaciones binarias mutuamente exclusivas sobre $A$, tales que las relaciones $Q_k$, $k = 1, 2, ..., m$, son antisimétricas, $I$ es reflexiva, e $I$ y $X$ son simétrica.*

**Definición 2.2** *Un sistema relacional* **Simple** *de preferencias $(I, P, X)$ en un conjunto $A$ es un sistema relacional consistente en una terna exhaustiva de relaciones binarias mutuamente exclusivas sobre $A$, tales que $P$ es antisimétrica, $I$ es reflexiva, e $I$ y $X$ son simétricas.*

La relación **Característica** de un sistema relacional simple es $C = P \cup I$. A partir de ella se determina el sistema por: $I = C \cap C^{-1}$, $P = C \cap \overline{C}^{-1}$ y $X = \overline{C} \cap \overline{C}^{-1}$. Todo sistema relacional múltiple de preferencias tiene asociado $m$ sistemas relacionales simples que se obtienen, $\forall k = 1, 2, ..., m$, uniendo las $k$ relaciones de preferencia graduales de menor intensidad a la relación de indiferencia extendida y uniendo las $m - k$ restantes en la relación de preferencia extendida. Sea $P_k = Q_k \cup Q_{k+1} \cup ... \cup Q_m$ la relación de preferencia extendida desde el grado $k$, sea $I_k = Q_{k-1} \cup ... \cup Q_2 \cup Q_1 \cup I \cup Q_1^{-1} \cup Q_2^{-1} \cup ... \cup Q_{k-1}^{-1}$ $(I_1 = I)$ la relación de indiferencia extendida hasta el grado $k$, y $C_k = P_k \cup I_k$ la $k$-ésima relación característica, $\forall k = 1, 2, ..., m$. Entonces los $m$ sistemas relacionales simples asociados son los sistemas $(I_k, P_k, X)$ con relaciones características $C_k$, $\forall k = 1, 2, ..., m$.

La completitud de un sistema de preferencias se alcanza al evitar la incomparabilidad. Un sistema relacional simple es completo si la relación característica es lineal. Un sistema relacional múltiple es completo si lo es alguno de los sistemas simples asociados.

# 3. Estructuras de Sistemas Relacionales Múltiples.

La estructura de un sistema relacional de preferencias viene dada por el número de relaciones binarias y las propiedades o restricciones que cumple. Las estructuras de los sistemas relacionales de preferencias se definen usando propiedades de transitividad mixta. Una propiedad de transitividad mixta en un sistema relacional simple de preferencias $(I, P, X)$ viene dado por el conjunto condiciones para concluir $aPb$ de una cadena del tipo $aCxCy...zCb$.

**Definición 3.1** *Un sistema relacional simple de preferencias $(I, P, X)$ tiene estructura de:*

*(i)* **Preorden** *si y sólo si: $C \cdots C \Rightarrow P$ si hay (al menos) una $P$.*

*(ii)* **Semiorden** *si y sólo si: $C \cdots C \Rightarrow P$ si hay más $P$ que $I$.*

*(iii)* **Orden de Intervalo** *si y sólo si: $P \cdots C \cdots P \Rightarrow P$ si no hay dos $I$ consecutivas.*

Las estructuras de los sistemas relacionales múltiple de preferencias se definen también por propiedades de transitividad mixta. Una propiedad transitividad mixta en un sistema relacional múltiple de preferencias es una propiedad de transitividad mixta en uno de los sistemas relacionales simples de preferencias asociados (i.e., un conjunto de condiciones para concluir $aP_kb$ de una cadena del tipo $aC_kxC_ky...zC_kb$) o una propiedad de conexión entre dos sistemas relacionales simples de preferencias asociados (i.e., un conjunto de condiciones para concluir $aP_kb$ de una cadena del tipo $aC_jxC_jy...zC_jb$, con $j < k$).

Se definen las estructura de semiorden múltiple débil y fuerte, y de orden de intervalo múltiple con $m(m+1)/2$ transitividades mixtas: $(a)$ $m$ propiedades correspondientes a cada sistema relacional de preferencias simple asociado $(I_k, P_k, X)$, y $(b)$ $m(m-1)/2$ propiedades conectando cada par de sistemas relacionales de preferencias simples $(I_k, P_k, X)$ y $(I_j, P_j, X)$ asociados.

**Definición 3.2** *Un sistema relacional múltiple de preferencias $(I, Q_1, Q_2, ..., Q_m, X)$ tiene estructura de:*

*(i)* **Semiorden Múltiple Fuerte** *si y sólo si:*

- *(a)* $\forall 1 \leq k \leq m$: $C_k \cdots C_k \Rightarrow P_k$ *si hay más* $P_k$ *que* $I_k$.
- *(b)* $\forall 1 \leq j < k \leq m$: $C_j \cdots P_k \cdots C_j \Rightarrow P_k$ *si no hay dos* $I_j$ *consecutivos.*

*(ii)* **Semiorden Múltiple Débil** *si y sólo si:*

- *(a)* $\forall 1 \leq k \leq m$: $C_k \cdots C_k \Rightarrow P_k$, *si hay más* $P_k$ *que* $I_k$.
- *(b)* $\forall 1 \leq j < k \leq m$: $C_j \cdots C_j P_k \cup P_k C_j \cdots C_j \Rightarrow P_k$ *si no hay dos* $I_j$ *consecutivos.*

*(iii)* **Orden de Intervalo Múltiple** *si y sólo si:*

- *(a)* $\forall 1 \leq k \leq m$: $P_k C_k \cdots C_k P_k \Rightarrow P_k$, *si no hay dos* $I_k$ *consecutivos.*
- *(b)* $\forall 1 \leq j < k \leq m$: $P_j C_j \cdots C_j P_k \Rightarrow P_k$, *si no hay dos* $I_j$ *consecutivos.*

# 4. Implicaciones Esenciales.

El conjunto de **Implicaciones esenciales** de cada una de estas estructuras es un conjunto de las implicaciones más cortas que caracteriza la estructura. Se obtiene de la cadena más simple contemplada en las correspondientes propiedades de transitividad mixta.

**Teorema 4.1** *El conjunto de implicaciones esenciales de las estructuras de sistemas relacionales simples de preferencias* $(I, P, X)$ *son:*

*(i) Para el preorden:* $PP \Rightarrow P$, $PI \Rightarrow P$, $IP \Rightarrow P$.

*(ii) Para el semiorden:* $PIP \Rightarrow P$, $PPI \Rightarrow P$, $IPP \Rightarrow P$.

*(iii) Para el orden de intervalo:* $PIP \Rightarrow P$.

Las implicaciones esenciales de la estructura de sistemas relacionales múltiples de preferencias se agrupan en dos conjuntos: las primeras *(a)* corresponden a cada sistema relacional de preferencias simple asociado, y las segundas *(b)* conectan dos de estos sistemas.

**Teorema 4.2** *El conjunto de implicaciones esenciales de la estructura de un sistema relacional de preferencias múltiple* $(I, Q_1, Q_2, ..., Q_m, X)$ *son:*

*(i) Para la estructura de semiorden múltiple fuerte:*

- *(a)* $\forall 1 \leq k \leq m$: $P_kI_kP_k \Rightarrow P_k$, $I_kP_kP_k \Rightarrow P_k$, $P_kP_kI_k \Rightarrow P_k$.
- *(b)* $\forall 1 \leq j < k \leq m$: $P_kP_jI_j \Rightarrow P_k$, $P_jI_jP_k \Rightarrow P_k$, $I_jP_jP_k \Rightarrow P_k$, $P_kI_jP_j \Rightarrow P_k$, $I_jP_kP_j \Rightarrow P_k$, $P_jP_kI_j \Rightarrow P_k$.

*(ii) Para la estructura de semiorden múltiple débil:*

- *(a)* $\forall 1 \leq k \leq m$: $P_kI_kP_k \Rightarrow P_k$, $I_kP_kP_k \Rightarrow P_k$, $P_kP_kI_k \Rightarrow P_k$.
- *(b)* $\forall 1 \leq j < k \leq m$: $P_kP_jI_j \Rightarrow P_k$, $P_jI_jP_k \Rightarrow P_k$, $I_jP_jP_k \Rightarrow P_k$, $P_kI_jP_j \Rightarrow P_k$,

*(iii) Para la estructura de orden de intervalo múltiple:*

- *(a)* $\forall 1 \leq k \leq m$: $P_kI_kP_k \Rightarrow P_k$.
- *(b)* $\forall 1 \leq j < k \leq m$: $P_jI_jP_k \Rightarrow P_k$.

# 5. Soporte de Umbrales

Una manera usual de adoptar un sistema de preferencias es utilizando valoraciones de las alternativas y umbrales de preferencia. Un **soporte de umbral** de un sistema relacional simple consiste en un par de funciones sobre el conjunto de alternativas que caracteriza al sistema: una función **valor** $v$, que da la valoración de las alternativas, y una función **umbral** $u$, que establece el umbral de la indiferencia a la preferencia.

**Definición 5.1** *Un* **soporte de umbral** *del sistema relacional de preferencias simple* $(I, P, X)$ *es un par de funciones* $(v, u)$ *sobre las alternativas tales que* $\forall a, b \in A$*:*

*(i)* $aPb \Leftrightarrow v(a) > u(b)$.

*(ii)* $aIb \Leftrightarrow v(a) \leq u(b)$ *y* $v(b) \leq u(a)$.

Por la reflexividad de la indiferencia, el soporte debe verificar: $v(a) \leq u(a)$, $\forall a \in A$. La incomparabilidad sólo aparece si alguna de estas funciones no ha sido aún evaluada.

Un soporte de umbrales de un sistema múltiple consta de $m + 1$ funciones en el conjunto de alternativas que caracterizan el sistema: una función **valor** $v$ que da la valoración de las alternativas y $m$ funciones **umbrales** $u_k$ que establecen los umbrales entre los distintos grados de preferencia, $k = 1, 2, ..., m$.

**Definición 5.2** *Un* **soporte de umbrales** *de un sistema relacional de preferencias múltiple es una* $m + 1$*-upla* $(v, u_1, u_2, ..., u_m)$ *de funciones sobre las alternativas tales que* $\forall a, b \in A$*:*

*(i)* $\forall k = 1, 2, ..., m$*:* $aP_kb \Leftrightarrow v(a) > u_k(b)$.

*(ii)* $aIb \Leftrightarrow v(a) \leq u_1(b)$ *y* $v(b) \leq u_1(a)$.

Todo soporte de umbrales debe verificar: $v(a) \leq u_1(a) \leq u_2(a) \leq ... \leq u_m(a)$, $\forall a \in A$.

Las propiedades del soporte determinan la estructura de un sistema relacional de preferencias. Para un conjunto finito de alternativas, la existencia de un soporte es también una condición necesaria para la correspondiente estructura.

**Teorema 5.1** *Sea* $(I, P)$ *un sistema relacional simple de preferencias completo en* $A$*.*

*(i)* $(I, P)$ *tiene estructura de preorden si y sólo si tiene un soporte* $(v, u)$ *donde el umbral* $u$ *coincide con la valoración* $v$*.*

*(ii)* $(I, P)$ *tiene estructura de semiorden si y sólo si tiene un soporte* $(v, u)$ *donde la diferencia entre el umbral* $u$ *y la valoración* $v$ *es constante.*

*(iii)* $(I, P)$ *tiene estructura de orden de intervalo si y sólo si tiene un soporte* $(v, u)$ *donde el umbral* $u$ *es una función de la valoración* $v$*.*

Para probar la suficiencia de la existencia de cada uno de los soportes propuestos para las estructuras de un sistema basta con probar el correspondiente conjunto de implicaciones esenciales. Para la estructura de semiorden es también necesario y suficiente que exista un soporte donde el umbral sea una función no decreciente de la valoración.

Sea $n$ es el tamaño del conjunto $A$ de alternativas. Dada una relación binaria $R$ sobre $A$ se denotan los conjuntos de elementos relacionados con uno dado por: $R(a) = \{x \in A : aRx\}$, $\forall a \in A$. Para obtener los soportes de las estructuras de un sistema simple se usa la función, $f(a) = n|P(a)| + |C(a)|$, $\forall a \in A$.

Si el sistema relacional simple completo $(I, P)$ tiene estructura de orden de intervalo, el soporte viene dado, $\forall a \in A$, por la valoración es $v(a) = f(a)$ y el umbral $u(a) = \max_{x \in C(a)} v(x)$, que es función de la valoración. Si el sistema tiene estructura de semiorden el umbral de este soporte es una función no decreciente de la valoración.

Para obtener un soporte con diferencia constante entre el umbral y la valoración usamos los conjuntos $I^+(a) = \{x \in I(a) : f(x) < f(a)\}$, $\forall a \in A$ y la cantidad $s = \max\limits_{a \in A} |I^+(a)|$. La valoración de las alternativas se calcula recursivamente para alternativas con valores crecientes de $f$ por:

$$v(a) = 1 + \max\{s + \max_{x \in P(a)} v(x), \max_{x \in I^+(a)} v(x)\}.$$

Si se define el umbral, $\forall a \in A$, por $u(a) = v(a) + s$ se obtiene un soporte de $(I, P)$.

Si $(I, P)$ tiene estructura de preorden completo y se toma, $\forall a \in A$, el valor y el umbral por $u(a) = v(a) = f(a)$, se tiene un soporte de $(I, P)$.

**Teorema 5.2** *Sea $(I, Q_1, Q_2, ..., Q_m)$ un sistema relacional de preferencias múltiple completo.*

*(i)* $(I, Q_1, Q_2, ..., Q_m)$ *tiene estructura de semiorden múltiple fuerte si y sólo si tiene un soporte* $(v, u_1, u_2, ..., u_m)$ *donde la diferencia entre cada umbral* $u_k$ *y la valoración* $v$ *es constante.*

*(ii)* $(I, Q_1, Q_2, ..., Q_m)$ *tiene estructura de semiorden múltiple débil si y sólo si tiene un soporte* $(v, u_1, u_2, ..., u_m)$ *donde cada umbral* $u_k$ *es una función no decreciente de la valoración* $v$.

*(iii)* $(I, Q_1, Q_2, ..., Q_m)$ *tiene estructura de orden de intervalo múltiple si y sólo si tiene un soporte* $(v, u_1, u_2, ..., u_m)$ *donde cada umbral* $u_k$ *es función de la valoración* $v$.

Como en los sistemas simples, la suficiencia de las propiedades se muestran probando cada una de las implicaciones esenciales. Para obtener los soportes de los sistemas múltiples se usa la función dada, $\forall a \in A$, por:

$$f(a) = n \sum_{k=1}^{m} |P_k(a)| + \sum_{k=1}^{m} |C_k(a)|$$

Sea $(I, Q_1, Q_2, ..., Q_m)$ un sistema relacional múltiple completo. Si este sistema tiene estructura de orden de intervalo múltiple, en el soporte dado, $\forall a \in A$, por la valoración: $v(a) = f(a)$ y los umbrales $u_k(a) = \max\limits_{x \in C_k(a)} v(x)$, cada umbral es función de la valoración. Si el sistema tiene estructura de semiorden débil entonces cada umbral de este soporte es función no decreciente de la valoración.

Si el sistema tiene estructura de semiorden fuerte, para obtener un soporte con diferencias constantes entre los umbrales y la valoración introducimos la relación $aQ_0b$ si y sólo si $aIx$ y $f(x) < f(a)$, $\forall a \in A$. Sea la cantidad: $s = \max\limits_{0 \leq k \leq m} \max\limits_{a \in A}\{|Q_k(a)|$. La valoración de las alternativas se calcula recursivamente para valores crecientes de $f$ por:

$$v(a) = 1 + \max_{0 \leq k \leq m} \{ks + \max_{x \in Q_k(a)} v(x)\}.$$

Sean los umbrales $u_k(a) = v(a) + ks$, $\forall k = 1, 2, ..., m$, entonces $(v, u_1, u_2, ..., u_m)$ es un soporte de $(I, Q_1, Q_2, ..., Q_m)$.

# 6. Conclusiones.

Los sistemas relacionales simple y doble de preferencias son los casos especiales de sistemas relacionales múltiples de preferencias donde $m = 1$ y $m = 2$. Las estructuras de sistemas múltiples aquí consideradas, con los correspondientes herramientas, son extensiones de las estructuras de sistemas simple y doble aparecidos en la literatura. Tales estructuras se suelen definir por propiedades similares a las implicaciones esenciales en vez de transitividades mixtas.

La estructura de preorden no puede extenderse a sistemas múltiples, puesto que sólo uno de los sistemas simples asociados puede tener estructura de preorden. Al extender la estructura de semiorden se puede hacer de manera que se obtengan soportes con umbrales no decrecientes en la valoración o con umbrales a distancia constante de la valoración. De esta forma obtenemos las estructuras de semiórdenes múltiples fuerte y débil.

El semiorden simple fue introducido en [3], En [11] se obtuvo el soporte usando resultados de grafos (ver, [9]). En [2] se introdujo el orden de intervalo simple y se dio el soporte. El semiorden doble débil es el pseudo-orden dado en [10]. El semiorden doble fuerte es el semiorden doble dado en [1] (ellos usan una definición diferente que es equivalente a la nuestra; ver [4]). El orden de intervalo doble fue introducido en [5]. Otras estructuras de sistemas relacionales dobles aparecidas en la literatura surgen cuando el sistema simple asociado $(I, P_1)$ es un preorden. Entonces, el semiorden doble (débil o fuerte) es el **casi-orden** (ver [10]) y el orden de intervalo doble es el **preorden de intervalo** (ver [5]). Estas estructuras se caracterizan también por el correspondiente soportes con la condición adicional: $v(a) = u_1(a)$, $\forall a \in A$ (ver [5]).

Las estructuras de semiorden y orden de intervalo múltiples pueden también combinarse de varias formas distintas en una nueva estructura de sistema relacional múltiple de preferencias (ver [7]). La diferencia entre dos estructuras no tiene sentido si no existe un sistema con una de las estructura pero no la otra. Estas cuestiones deben resolverse encontrando los contraejemplos correspondientes. Para obtener estos contraejemplos se pueden generar aleatoriamente conjuntos de alternativas no muy grandes hasta encontrarlos. Basta con considerar sistemas dobles y el número de casos que hay generar para encontrarlos es moderado.

Del mismo modo, la necesidad de todo el conjunto de implicaciones esenciales de cada estructura tendría que ser establecida encontrando contraejemplos de sistemas que verifiquen todas ellas excepto una, variando esta última en todo el conjunto. Tales sistemas para la estructura de pseudo-orden fueron aportadas en [10]. Estas cuestiones pueden también resolverse con sistemas generados aleatoriamente. Sin embargo, dada la cantidad de contraejemplos necesarios esta tarea resulta bastante tediosa. Para sistemas completos, algunas implicaciones esenciales pueden obtenerse de otras implicaciones esenciales del mismo conjunto; por ejemplo, para la estructura de semiorden, $PPI \Rightarrow P$ es equivalente a $IPP \Rightarrow P$. Por tanto, una de ellas no sería necesaria. Sin embargo, no existe motivo alguno para usar una de estas implicaciones esenciales en vez de la otra. Por ello no parece rentable emplear demasiados esfuerzos en probar la necesidad de todas las implicaciones esenciales.

Una relación binaria en un conjunto finito puede representarse por un grafo y por una matriz booleana. Los vértices del grafo y las filas y columnas de la matriz corresponden a los elementos del conjunto. Estas representaciones son fácilmente tratadas en un ordenador usando herramientas sencillas y su aspecto puede dar una clara imagen de la estructura de la relación. Un sistema relacional simple se representa por el grafo y la matriz correspondiente a la relación característica.

De forma análoga, un sistema relacional múltiple de preferencias se puede representar por una serie de grafos con el mismo conjunto de nodos; uno para cada sistema relacional simple de preferencias asociado. Constituyen un grafo múltiple con un tipo de arista para cada sistema simple asociado. Entonces, una propiedad de transitividad mixta se interpreta por la inexistencia de circuitos en el grafo múltiple correspondiente. Por tanto, las estructuras de sistemas relacionales múltiples de preferencias se pueden caracterizar por propiedades de la representación por grafos.

Un sistema relacional múltiple de preferencias se puede también representar por una serie de matrices booleanas; una para cada sistema relacional simple de preferencias asociado. Entonces, cada implicación esencial se interpreta por una restricción lineal en los valores de las correspondientes matrices. Por tanto, la estructuras de los sistemas múltiples se caracterizan por conjuntos de restricciones lineales sobre su representación matricial. Una representación apropiada de un sistema múltiple es muy útil para conseguir una visión clara de su estructura. Para ello, la valoración del correspondiente soporte debe guiar la asignación de alternativas a las filas y columnas de las matrices y a los nodos de los grafos (ver [6]).

# Referencias


[1] Cozzens, M. and Roberts, F. (1982). Multiple semiorders and multiple indifference graphs, *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 3, 566-583.

[2] Fishburn, P.C. (1970). *Utility Theory for Decision-Making*, New York, John Wiley & Sons.

[3] Luce, R.D. (1956). Semiorders and the theory of utility discrimination, *Econometrica*, 24, 178-191.

[4] Moreno, J.A. (1992). A transitivity approach to preference relational systems, *European Journal of Operational Research*, 60, 68-75.

[5] Moreno, J.A. (1993). Structures of Preference Relational Systems, *Decision Making: Toward the 21ts Century*. Madrid, June 2-5.

[6] Moreno, J.A. (1994). On the implementation of Preference Relational Systems in a Computer Aided Decision Support System, *Cybernetic and Systems* 25(1), 17-37.

[7] Moreno, J.A. (1994). The Mixed Transitivity Approach to Multiple Preference Relational Systems. Pendiente de publicación en *The International Journal of Multicriteria Analysis.*

[8] Roy, B. (1985). *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*, Paris, Economica.

[9] Roubens, M. and Vincke Ph. (1985). *Preference Modelling*, New York, Springer Verlag.

[10] Roy, B. and Vincke, Ph. (1987). Pseudo-orders: definition, properties and numerical representation, *Mathematical Social Science* 14, 263-274.

[11] Scott, D.S., and Suppes, P. (1958). Foundational aspects of theories of measurement, *J. Symbolic Logic*, 23, 113-128.



José A. Moreno Pérez
Dpto. de Estadística, Inv.
Operativa y Computación.
Universidad de La Laguna.
38271. La Laguna. Spain.
JAMORENO@ULL.ES.

J. Marcos Moreno Vega
Dpto. de Estadística, Inv.
Operativa y Computación.
Universidad de La Laguna.
38271. La Laguna. Spain.
JMMORENO@ULL.ES.

Clara Campos Rodríguez
Dpto. de Economía,
Financiera y Contabilidad.
Universidad de La Laguna.
38271. La Laguna. Spain.