

## ALGUNOS RESULTADOS SOBRE PROMEDIOS CON ESTUDIANTES EN LUANDA Y TENERIFE

A. J. Garrett y J.A. García Cruz

*Universidad de La Laguna*

### 1. Introducción

Los promedios constituyen un contenido común a los currícula de enseñanza de diferentes países en los niveles previos a la universidad, y diferentes estudios internacionales han señalado grandes dificultades de comprensión en el alumnado de los diferentes niveles educativos. El estudio del conocimiento exacto de las dificultades del alumnado sobre un determinado tema en el proceso de enseñanza y aprendizaje ayuda a los profesores a determinar métodos y técnicas coherentes para impartir estos contenidos, facilitando de esta forma el desarrollo de los conocimientos por parte del alumnado. Este hecho, nos ha motivado a continuar los estudios que se han venido realizando en la enseñanza y aprendizaje estadística y, en particular, en el campo de los promedios con el propósito de aportar nuestra contribución en la investigación de las dificultades, estrategias y concepciones del alumnado cuando abordan situaciones problemáticas que conllevan el uso de promedios.

### 2. Investigaciones Previas

Los estudios realizados en las últimas décadas sobre promedios indican que a pesar de que el concepto parece ser fácil, los alumnos presentan grandes dificultades en su comprensión. En Pollatsek, Lima y Well (1981) se ha visto que incluso alumnos universitarios, no ponderan adecuadamente los valores al resolver problemas de media ponderada y en ocasiones usan la media simple, en lugar de la media ponderada. Los resultados encontrados por Mevarech (1983) indican que una explicación posible de los errores de los alumnos en el cálculo de la media, es que se comportan como si un conjunto de números, junto con la operación media aritmética constituyera un grupo algebraico, que satisface los cuatro axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso. El estudio de Strauss y Bichler (1988) sugiere una mejora en la comprensión del concepto con la edad, y observa distintas dificultades en la comprensión de las propiedades del concepto. Los resultados encontrados en Mokros y Russell (1995) identificaron y analizaron cinco construcciones básicas sobre representatividad en los alumnos: La media como moda, la media como algoritmo, la media como algo razonable, la media como punto medio y la media como punto matemático de equilibrio. El estudio de Cai (1995) ha revelado que el 90% del alumnado que participó en su investigación conocían el mecanismo de “sumar todos y dividir” que constituye el algoritmo de cálculo. Sin embargo, sólo algunos de ellos mostraron evidencias de comprender el concepto. El estudio de Watson y Moritz (2000) con niños de 8 a 15 años, de tercero hasta el curso noveno ha indicado que para un gran número de niños el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución. La noción de promedio se relaciona poco con la moda y menos aún con la media aritmética. Los resultados observados en la investigación de Cobo y Batanero (2004) indican que a pesar de existir una buena comprensión de la media, algunos alumnos no comprenden que la media no es una operación interna en el conjunto de referencia. En torno a la mitad de los alumnos de 4º es capaz de resolver problemas de media

ponderada, dando ponderaciones adecuadas, mientras que en 1º, sólo alrededor de un 10% lo realiza correctamente.

Recientemente se han presentado algunos estudios en los cuales se destacan el uso del cuestionario, como uno de los instrumentos más ampliamente utilizado para explorar los conocimientos y la comprensión del alumnado sobre los promedios. Así, Garfield (2003) presenta un cuestionario diseñado como un instrumento para evaluar el razonamiento estadístico, que consta de veinte preguntas de respuestas de elección múltiple sobre conceptos básicos de estadística y probabilidad. El mismo cuestionario, (elaborado por Garfield y Konold en 1993), había sido inicialmente desarrollado para evaluar la eficacia de un nuevo currículo de estadística en la enseñanza secundaria. Posteriormente se utilizó con estudiantes universitarios de primer curso (college), no sólo para evaluar la eficacia de las materias curriculares sino también para describir el perfil del razonamiento estadístico del alumnado. Cuatro ítems del referido cuestionario que evalúan cuestiones sobre los promedio, fueron utilizados por Batanero, Godino y Navas (1997) en un estudio con estudiantes de las titulaciones de maestros de primaria y de segundo cursos de pedagogía que habían asistido a un curso de metodología de investigación. En este trabajo, los cuatro ítems del cuestionario de Garfiel y Konold se describen con comentarios cabales, que nos han servido de referencia en el desarrollo de nuestro trabajo. De la misma forma, destacamos también otro trabajo reciente en el cual se evalúa la comprensión del alumnado sobre promedios, usando como instrumento el cuestionario. Se trata de una investigación de Cobo y Batanero (2004), realizada en primer y cuarto curso de ESO, con el propósito de evaluar la comprensión de la media aritmética, teniendo en cuenta los componentes del significado de la media, descritos en Batanero y Godino (2001).

### 3. Objetivo

El objetivo de nuestro trabajo es construir un cuestionario, que permita examinar los conocimientos y dificultades en la comprensión de los promedios del alumnado que está finalizando la enseñanza secundaria y realizar un estudio comparativo entre el alumnado de Luanda (Angola) y Tenerife (España). Los trabajos citados anteriormente constituyen un puente para la concreción de nuestro objetivo. Sin embargo, teniendo en cuenta que todos los problemas del cuestionario de Garfield eran de respuestas cerradas, que restringe la respuesta del alumnado a la elección de una ya dada, nuestra opinión es que esta forma de evaluación crea incertidumbre sobre el verdadero conocimiento, ya que no permite saber hasta que punto el sujeto escoge la respuesta al azar o responde con criterio. Este hecho, nos ha motivado a elaborar un cuestionario con características diferenciadas, y creemos que de esta forma damos un paso más en la investigación de este concepto.

### 4. El Cuestionario

Nuestro cuestionario consta de siete ítems, algunos con varios apartados. Con este instrumento pretendemos averiguar cómo interpreta el alumnado la media aritmética, cómo comprenden y usan el algoritmo de la media (simple o ponderada), cómo analizan e interpretan los datos presentados gráficamente, y qué estrategias usan en la solución de problemas de cálculo directo de la media (simple o ponderada), qué criterios usan para comparar dos conjuntos de medias iguales y cómo construyen una distribución de media dada. Para tal fin, hemos seleccionado dos tipos de ítems: los de elección múltiple (cerrados) y los abiertos. Combinamos, además, los formatos texto, texto-tabla y texto-gráfico. En cuanto a los datos numéricos hemos utilizado números enteros y decimales. Hemos cuidado el contexto de forma que resulte cercano al

alumnado dado que, desde el punto de vista metodológico, suponemos que la contextualización de las tareas facilita en gran medida su resolución. Los ítems se denominan según el contexto que los define. El tiempo estimado para pasar la prueba con este cuestionario es de cuarenta y cinco minutos a una hora.

## 5. La Muestra

La muestra de Tenerife la constituyen 96 estudiantes de un instituto de secundaria de La Laguna, combinando estudiantes de bachillerato según la distribución mostrada por la siguiente tabla:

Niveles	1BACH	2BACH	Total
Nº de Alumnos	48	46	96

Para la muestra de Luanda (Angola), seleccionamos un total de 146 alumnos del decimoprimer curso, que cursaban una formación media en Contabilidad y Gestión en un instituto público. Este nivel de enseñanza, constituye una de las dos vías que permite el ingreso en la universidad, después que el alumnado haya concluido el duodécimo y que dota también el alumnado de un perfil técnico-profesional para que éste se integre en el mercado laboral, en el caso de no continuar sus estudios. Los grupos eran heterogéneos en cuanto al sexo, y sus edades variaban entre los 17 y 23 años. Habían estudiado estadística descriptiva en el curso académico anterior, lo que suponía que habrían adquirido nociones fundamentales sobre los promedios. En el período en que se administró la prueba estaban estudiando la segunda parte de la asignatura que se relacionaba con cuestiones de probabilidad. Hemos seleccionado cuatro grupos, que habían tenido profesores distintos en el curso académico previo según la información que nos fue proporcionada, cuya composición se presenta a continuación:

Grupos	G	H	I	J	Total
Nº de Alumnos	34	40	36	36	146

## 6. Resultados

Establecimos un sistema de categorías para las respuestas del alumnado que permitiese realizar el tratamiento de la información, usado un software estadístico denominado Systat. Las categorías fueron determinadas teniendo en cuenta el tipo de ítem. Para los de respuestas de elección múltiple, relacionamos la categoría con el contenido matemático del distractor, mientras que para los de respuesta abierta, establecimos como categoría la estrategia presentada por el sujeto en el proceso de resolución. En nuestro estudio, el tratamiento general de la información se ha basado en categorías. Sin embargo, en este trabajo presentamos los resultados en términos de respuestas correctas y incorrectas, puesto que cuando se administró el cuestionario en Angola, introdujimos algunas mejoras y modificaciones al cuestionario original. Por motivo de tiempo y espacio, aquí sólo presentamos los resultados de tres ítems, de los siete que componían el cuestionario original.

La siguiente tabla resume los datos relativos a Tenerife y Angola según los tres ítems seleccionados, señalándose en la primera columna el objetivo perseguido en cada uno. Los ítems, en español y portugués, se presentan en dos anexos.

Ítem/Objetivo	Correctos				Incorrectos			
	Tenerife		Luanda		Tenerife		Luanda	
	N	%	N	%	N	%	N	%
4. Hijos <i>Calcular una media ponderada</i>	32	34	4	2'7	62	66	125	97'3
5.A a) Gráfico de Notas <i>Extraer y manipular datos del gráfico, para calcular la media.</i>	47	50	9	6'1	47	50	120	93'9
5.A b) Gráfico de Notas <i>Establecer comparaciones entre dos muestras</i>	7	7'4	8	5'5	87	92'6	121	94'5
6.a) Familia <i>Construir una distribución de media dada.</i>	47	50	5	3'4	47	50	124	96'6

- En el ítem 4, que hemos designados por “Hijos”, se pedía a los alumnos determinar el número medio de hijos de 50 familias entrevistadas. Los resultados encontrados, indican que los estudiantes de la muestra de Tenerife tuvieron menos dificultades que los de Luanda, pues, obtuvieron un 34% de respuestas correctas contra el 4% logrado por sus homólogos. Los primeros utilizaron el algoritmo de media ponderada y muestran las operaciones en el 22'3% de los casos y un 11'7% sólo muestra los resultados, mientras que los alumnos de Luanda lo hacen solamente por una vía, empleando el algoritmo de la media ponderada (2'7%), mostrando los cálculos. Las principales estrategias incorrectas encontradas en el proceso de resolución del problema por los alumnos de Tenerife consisten en: dividir la suma de los valores de la variable por la suma de las frecuencias (2'1%); dividir la suma de las frecuencias por la suma de los valores de la variable (4'3%), dar un resultado incorrecto sin mostrar las operaciones (35'1%); utilizar procedimientos incoherentes o no contestar el ítem. Los alumnos de Luanda, presentaron más estrategias incorrectas en este problema, quizá debido a una modificación introducida en el mismo que permitía evaluar también los procedimientos usados para determinar el total de familias (suma de las frecuencias), ya que en el estudio anterior el valor total estaba dado. Las estrategias erróneas que más nos llamaron la atención, fueron las siguientes: Sumar n valores de la variable y dividir por n (8'9%); dividir la suma de los valores de la variable por la suma de las frecuencias (6'8%); dividir la suma de las frecuencias por la suma de los valores de la variable (1'4%); indicar un valor cualquier como media sin mostrar las operaciones (23'2%); utilizar procedimientos incoherentes o no contestar (39%).
- En el ítem 5.A a), se pedía a los alumnos comprobar que la media de un conjunto de notas que se mostraban en el gráfico era un número dado. Los resultados apuntaron que los alumnos de Tenerife tuvieron más éxito. Obtuvieron un 50% de respuestas correctas y lo hicieron usando el algoritmo de la media ponderada (43'6%) o sumando las diez notas y dividiendo la suma por diez (6'4%). En la muestra de Luanda, sólo un 6'1% consiguió llegar al resultado correcto, por las mismas vías, con 2'7% y 3'4% respectivamente. Algunas de las estrategias incorrectas usadas en los dos grupos fueron las siguientes: determinar la media de los valores (o algunos valores) del eje horizontal; calcular la media entre los valores extremos; usar el algoritmo de media pero calculando erróneamente la suma total o la suma de las frecuencias; usar procedimientos incoherentes o no contestar. Nos ha llamado la

atención el porcentaje de alumnos que no contestaron este apartado, que fue un 58'9% en la muestra de Luanda y 18'1% en la de Tenerife.

- El ítem 5.A b) era un complemento del ítem anterior. Se pedía a los alumnos decir y justificar qué grupo les parecía mejor, si los mismos tenían medias iguales, haciendo el análisis de dos gráficos. Con eso se pretendía explorar los criterios usados por los alumnos para comparar dos conjuntos de datos. Hemos encontrado que tanto los alumnos de Tenerife como los de Luanda no presentaban criterios fundados al establecer la comparación entre los dos conjuntos presentados. Los porcentajes de respuestas correctas (tuvieron en cuenta la variabilidad) fueron de 7'4 y 5'5 en las respectivas muestras. Las demás justificaciones presentadas por los alumnos de Tenerife, fueron las siguientes: “El grupo 2 es mejor porque en él hay más alumnos aprobados” (45'7%); “No hay diferencias entre los dos grupos porque tienen medias iguales” (14'9%); “el grupo 1 es mejor porque en él hay alumnos con mayor nota” (7'4%); Un 11'7%, da justificaciones confusas. Los criterios más usados por los alumnos de Luanda fueron: “El grupo 2 es mejor porque en él hay más alumnos aprobados” (20'5%); “No hay diferencias entre los dos grupos porque tienen medias iguales” (12'3%); “el grupo 1 es mejor porque en él hay alumnos con mayor nota” (8'9%); y un 14'4% presenta justificaciones bastante confusas. Cabe destacar, que con el propósito de analizar la convicción del alumnado sobre los argumentos dados, se creó un segundo ítem, de respuestas de elección múltiples, que nos ha permitido concluir que además de no contar con métodos fundados para comparar dos conjuntos de datos con medias iguales, tampoco son consecuentes en sus afirmaciones.
- En el ítem 6.a) un dato del problema hacía referencia a que la composición media de las familias de una determinada localidad era de 3'2 personas. Se pedía al alumnado dar 10 familias que cumpla esta media. Se trata, por lo tanto, de un problema de construcción de una distribución de media dada. El contexto limita el tipo de dato a utilizar. Los resultados mostraron que el 50% de los alumnos de Tenerife da una distribución correcta, por dos vías: el 27'7% lo hace determinando la suma total de hijos de las 10 familias, invirtiendo el algoritmo de la media y un 22'3% da una distribución sin mostrar las operaciones. Encontramos un 4'3% que da una distribución que no cumple los requisitos del enunciado, un 12'8% que usa procedimientos incoherentes y un número considerable de alumnos que no contesta (33%). Los alumnos de Luanda tuvieron enormes dificultades en este ítem. Los resultados mostraron que de los 146 alumnos, sólo 5 (3'4%) dieron una distribución correcta, mediante la determinación del total (invirtiendo el algoritmo de la media). La mayoría no contestó el problema (79'5%). Encontramos un 3'4% que determina correctamente la suma total pero no da la distribución; 2 alumnos (1'4%) dan una distribución con valores decimales sin tener en cuenta el contexto del problema, un 4'8% da una distribución que no cumple los requisitos del enunciado y un 15'8% utiliza procedimientos incoherentes.

## 7. Conclusiones

Los resultados encontrados en los cuatro ítems revelaron que en las dos muestras los alumnos presentan dificultades al trabajar con los promedios. Eso se manifiesta por las diferentes estrategias incorrectas y procedimientos incoherentes usadas en los ítems 4, 5.A.a) y 6.a), así como los argumentos infundados dados para comparar dos grupos de medias iguales. Hemos notado que, a pesar de que algunos alumnos han planteado

correctamente la fórmula de cálculo en los problemas que exigían tal acción: no sabían cómo sustituir los datos ni los resultados intermedios calculados y algunos tampoco sabían cómo encontrarlos. Este hecho, nos lleva a conjeturar que estos alumnos no han comprendido el uso racional del algoritmo de la media aritmética. De igual modo, inferimos que el alumnado no cuenta con criterios formales para comparar dos conjuntos de datos con medias iguales, una dificultad que había sido apuntada en el estudio de Batanero, Godino y Navas (1997).

El porcentaje de respuestas correctas encontrados en la muestra de Tenerife en el ítem 6.a) sobre la construcción de una distribución de media dada (50%), es relativamente inferior al encontrado por Cobo y Batanero (2004), donde el 62'1% de los alumnos de cuarto y un 66'7% de primero fueron capaces de resolver un problema equivalente.

Los resultados muestran que los alumnos de Luanda (Angola) presentan enormes dificultades con respecto a los alumnos de Tenerife (España). No hemos podido averiguar con detalle las razones implicadas, pero de las informaciones verbales que nos han proporcionado algunos profesores y alumnos en el momento en que fue administrado el cuestionario, conjeturamos (para el alumnado de Luanda) que hay falta de aplicación y poco interés en el aprendizaje por parte del alumnado. Raras veces realizan las actividades complementarias que les son propuestas, algo que les podría ayudar a comprender mejor los contenidos abordados en las clases y profundizar sobre los mismos. Por otro lado, nos dimos cuenta de la existencia de factores de carácter metodológico, que apuntan a que las tareas que son presentadas normalmente por los profesores en las clases se centran fundamentalmente en calcular la media de un conjunto de números, sin que se presente un contexto de referencia e incluso las propiedades de la media no son abordadas. Además, los alumnos no disponen de libros de texto de estadística, que les podrían servir de material de apoyo diario para sus actividades. Incluso uno de los profesores nos había comentado que no creía que encontraríamos muchos alumnos capaces de resolver correctamente el ítem 6.a), sin que nos hubiera fundado su afirmación a pesar de habersele preguntado.

En este artículo hemos presentado resultados parciales de los datos de un trabajo de investigación más amplio, todavía no concluido, y que pensamos dar a conocer más adelante.

## 8. Referencias Bibliográficas

- Batanero, C. Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de Maestros de Primaria en Formación sobre los Promedios. *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa*, 310-324.
- Batanero, C. Godino, J. D. (2001). Developing New Theoretical Tools in Statistics Education Research. *Proceedings of the 5rd Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI* (Tome LIX, Book 2, 137-142), ISI, Seul.
- Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the XIX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.3, pp.144-151). Universidad de Pernambuco.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Razonamiento numérico en problemas de promedios. *Suma*, 45, 79-86.
- Garfield, J.B. (2003). Assessing Statistical Reasoning. *Statistical Education Research Journal* 2 (1), 22-38.
- Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in mathematics*, 14, 415-429.

- Mokros, J. y Russell, S. J. (1995). Children's Concepts of Average and Representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, 1, 20-39.
- Pollatsek, A. Lima, S. y Well, A.D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.
- Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 64-80.
- Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The Longitudinal Development of Understanding of Average. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (1/2), 11-50.

### Anexo 1 Ítems incluidos en el cuestionario pasado en Tenerife (España)

#### Problema 4: Hijos

Hemos preguntado en Tenerife a 25 familias sobre el número de hijos y nos han respondido:

10 familias no tenían hijos

7 familias tenían 1 hijo

5 familias tenían 2 hijos

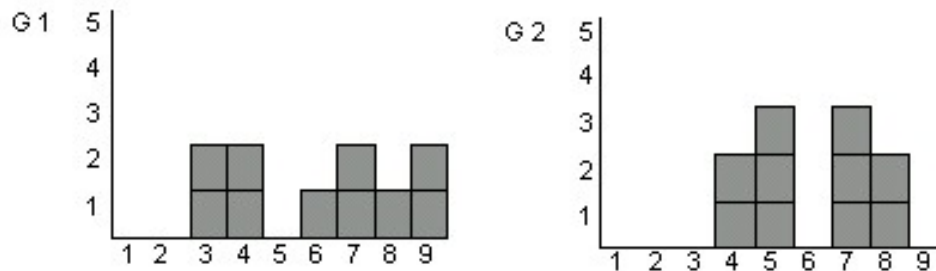
3 familias tenían 3 hijos

No hubo ninguna familia con 4 hijos

¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?

#### Problema 5: Gráfica de Notas

Veinte alumnos de un instituto participan en un concurso de matemáticas. Diez de los alumnos formaban el Grupo 1 y los otros diez formaban el Grupo 2. Las notas obtenidas en el concurso se muestran en los gráficos que se presentan a continuación:



Cada rectángulo en el gráfico representa la nota de un alumno en particular. Por ejemplo, en el Grupo 1, los dos rectángulos que aparecen sobre el número 9 indican que dos alumnos de este grupo obtuvieron un 9.

5.A El Grupo 1 tiene una nota media de 6.

- Comprueba que la nota media del Grupo 2 también es 6.
- ¿Qué grupo te parece mejor? Justificalo.

#### Problema 6: Familia

El tamaño medio de la familia en Canarias es de 3,2 personas.

- Da 10 familias que cumplan este promedio.

## Anexo 2 Ítems incluidos en el cuestionario pasado en Luanda (Angola)

### FILHOS

4. Perguntamos na cidade de Luanda à determinadas famílias sobre o número de filhos que tinham, e obtivemos os seguintes dados:

10 famílias não tinham filhos.

7 famílias tinham 1 filho.

5 famílias tinham 2 filhos.

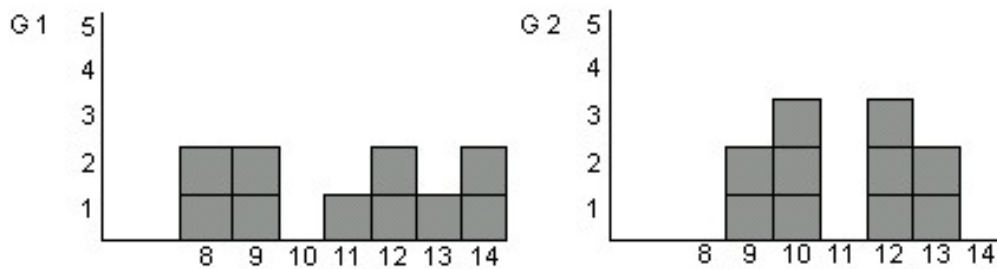
3 famílias tinham 3 filhos.

Não havia nenhuma família com 4 filhos.

Qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?

### GRÁFICO DE NOTAS

5. Vinte alunos de um Instituto participaram num concurso de matemática. Dez dos alunos formavam o Grupo 1 e os outros dez formavam o Grupo 2. As notas obtidas no concurso estão dadas nos gráficos que se apresentam a continuação:



Cada rectângulo no gráfico representa a nota dum aluno em particular. Por exemplo, no Grupo 1, os dois rectângulos que aparecem sobre o número 14 indicam que dois alunos deste grupo obtiveram 14 valores.

5. A O Grupo 2, tem uma nota média de 11 valores.

a) Comprove que a nota média do grupo 1 também é igual a 11.

b) Que grupo te parece melhor? Justifique a sua resposta.

### FAMÍLIA

6. A composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas.

a) Dê 10 famílias que cumpram esta média.