# Caracterización de la comprensión de algunos aspectos de la media aritmética: Un estudio con alumnos de secundaria y universitarios.

Alexandre Joaquim Garrett y Juan Antonio García Cruz

Recibido: Noviembre 2007
Aprobado: Febrero 2008

## RESUMEN

En este trabajo realizamos un análisis sobre el desarrollo cognitivo del concepto de media aritmética. El análisis nos lleva a una caracterización jerárquica en niveles de comprensión, de las respuestas de 227 estudiantes de la enseñanza secundaria y universitaria, tras contestar un cuestionario que combina problemas de respuestas abiertas y de elección múltiple. El análisis utiliza el modelo teórico SOLO y se observaron cinco niveles de respuestas en los alumnos. Las respuestas encontradas confirman diferentes tipos de dificultades sobre la conceptualización de la media aritmética en los dos grupos y, en general, los resultados no evidencian diferencias significativas entre alumnos de secundaria y universitarios.

**Palabras clave:** *Análisis cognitivo, media aritmética, didáctica de la estadística.*

## ABSTRACT

In this paper we set forth a cognitive developmental analysis of the arithmetic mean concept. This analysis leads us to a characterization in hierarchical comprehension levels of the responses of 227 students to a questionnaire which combine open-ended and multiple-choice questions. The theoretical framework SOLO is used in that analysis and we report five levels of student's responses. These responses confirm different types of difficulties on the students' arithmetic mean conceptualization. Also we have observed no significant differences between secondary and university student's responses.

**Key words:** *Cognitive Analysis, Arithmetic mean, Teaching of Statistics.*

## RESUMO

Neste trabalho realizamos uma análise sobre o desenvolvimento cognitivo do conceito média aritmética. A referida análise nos conduz a uma caracterização hierárquica em níveis de compreensão, das respostas proporcionadas por 227 estudantes do ensino secundário e universitário, depois de responderem um questionário que combina questões de respostas abertas e de múltipla escolha. A pesquisa se apoia no modelo teórico SOLO, e permitiu observar, nestes alunos, cinco níveis de respostas. As respostas encontradas confirmam diferentes tipos de dificuldades sobre a conceitualização da média aritmética nos dois grupos e, de forma geral, os resultados não evidenciaram diferenças significativas entre alunos da secundária e universitários.

**Palavras chave:** *Análise cognitivo, Média aritmética, Ensino da Estadística.*

# Introducción

La media aritmética es un contenido cuya incorporación a los currículos de enseñanza, en los diferentes países, se ha generalizado en los últimos años. Su instrucción no sólo se realiza en los institutos y centros universitarios sino que también ya es una práctica común en los primeros cursos escolares de la mayoría de los países, debido a su importancia en las diferentes esferas de la sociedad, y por ser un concepto básico para el estudio de otras temáticas.

Watson y Moritz (2000) señalan que los problemas relacionados con la media aritmética han sido resueltos por los estudiantes desde hace más de 100 años. Al respecto, estos autores indican situaciones asociadas con el uso directo del algoritmo de cálculo, con su proceso de inversión, así como al cálculo de la media ponderada para ilustrar algunos de los aspectos que aparecen en las tareas.

Sin embargo, a pesar de que este concepto se viene usando desde tiempos remotos, diferentes estudios (Pollatsek et al., 1981; Mevarech, 1983; Strauss y Bichler, 1988; Leon y Zawojewski, 1991; Batanero et al., 1997; Cai, 1995; Mokros y Russell, 1995; Garfield, 2003) han revelado que su comprensión, por parte de los estudiantes, viene acompañada de dificultades de diversas índoles, lo que demuestra que no es tan fácil para los alumnos entender las nociones básicas asociadas a este concepto. Tales dificultades se relacionan con diversos aspectos, tanto de orden procedimental como conceptual. Se refieren a la comprensión del concepto y su definición, a la comprensión de las propiedades del concepto, al uso adecuado del algoritmo de cálculo, a la capacidad de argumentación en situaciones donde es necesario, entre otras. Luego nos parece importante investigar sobre ellas, analizar su esencia y proponer situaciones didácticas que propicien una enseñanza y un aprendizaje acorde con las realidades mostradas en las investigaciones.

El conocimiento de estos elementos puede ayudar a los docentes e investigadores educativos, a encontrar soluciones que contribuyan a corregir el razonamiento de los estudiantes, de modo que, en sus respuestas, prevalezcan estructuras coherentes y significativas sobre este concepto.

Otro aspecto, no menos importante, que juega un papel primordial en el estudio de la media aritmética es la contextualización de las tareas. Esta situación ha merecido un gran reconocimiento por diversos autores. Por ejemplo, Gal (1995), considera que es difícil juzgar completamente lo que un estudiante conoce sobre una herramienta sin que se proporcione un contexto (es decir, un problema real) que puede motivar el uso de la herramienta. Sugiere que sería importante que los profesores usasen tareas principalmente de carácter interpretativo, presentadas de forma auténtica debido a la necesidad del uso de los promedios. Garfield (2003), defiende que en estadística los datos son vistos como números en un cierto contexto. El contexto motiva procedimientos y es la fuente del significado y la base para la interpretación de los resultados de tal actividad. De Strauss y Bichler (1988), Leon y Zawojewski (1991), Mokros y Russell (1995), notamos una convergencia de ideas, ilustrando claramente que la contextualización de las tareas facilitaba en cierto modo su resolución.

Las manifestaciones anteriores constituyen fundamentos de referencia para que un instrumento de medida, por ejemplo un cuestionario, incorpore tareas que reflejen el escenario de lo cotidiano, no sólo para facilitar la comprensión de las mismas, sino también para analizar hasta qué punto algunas de las realidades son conocidas por los alumnos.

Ahora bien, a pesar de la diversidad de investigaciones sobre la media aritmética, observamos pocos trabajos que abordan el aspecto relativo a la caracterización analítica de las respuestas de los alumnos en niveles de comprensión. Nos referimos al análisis basado en la teoría neopiagetiana SOLO, que evalúa de forma cualitativa el aprendizaje de los alumnos, clasificando jerárquicamente las estructuras presentes en sus respuestas. Este proceso, no sólo permite distinguir el tipo de respuesta presentada por el alumno sino que también ayuda a reflexionar si la misma se corresponde con el nivel exigido por la tarea, en función del grado cursado, y así programar situaciones de enseñanza que potencien su pensamiento. De igual forma, permite relacionar los resultados del aprendizaje con los objetivos propuestos inicialmente, proporcionando informaciones que ayudan a valorar la retroalimentación del proceso de enseñanza y aprendizaje (Biggs y Collis, 1982). Estos autores, señalan que la taxonomía SOLO puede jugar un papel importante en muchas etapas de enseñanza, en situaciones específicas. Según ellos, tales situaciones requieren de un enfoque sistemático, que parte de la formulación de las expectativas planteadas, tanto si son generales o específicas como si se refieren a los objetivos, al análisis del currículo enseñado y a los métodos de enseñanza, para evaluar y proponer mejoras siempre y cuando la situación lo requiera.

De la revisión bibliográfica, sólo en Watson y Moritz (1999; 2000), encontramos expresamente este tipo de análisis, aunque en estas investigaciones, los estudios se desarrollan solamente con estudiantes de primaria y secundaria, y las tareas analizadas se circunscriben a situaciones de comparación de dos conjuntos de datos en forma gráfica y al uso del término promedios en situaciones de lo cotidiano: uno relativo al número de horas dedicadas a ver televisión y otro al número de hijos en una familia. En nuestro trabajo estudiamos otros aspectos sobre la media aritmética, en contextos diferentes y el estudio se lleva a cabo además con alumnos universitarios, algo que hasta ahora no se había efectuado en este tipo de estudio.

# Objetivos y cuestiones de investigación

En este trabajo continuamos con nuestro estudio de las dificultades que los alumnos tienen en la comprensión de la media aritmética. Tratamos de contribuir con algunos elementos, provenientes de un estudio llevado a cabo con alumnos de Angola, una región de la que nada o poco se conoce sobre las concepciones, errores y dificultades de estos alumnos en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales.

El trabajo, que aquí presentamos, es parte de un estudio más amplio que venimos realizando sobre la media aritmética. Aquí, concretamente mostramos los resultados obtenidos al profundizar en el análisis de los diferentes niveles de desarrollo cognitivo que se observan en el aprendizaje de la media aritmética, estableciendo una estructura jerárquica de los resultados observados mediante el análisis de las respuestas de los alumnos, a tres tareas de un cuestionario más amplio.

Nuestro propósito es evaluar:

- El conocimiento de la media como el mejor estimador de una medida en presencia de errores de medición;
- El reconocimiento de los valores atípicos y su influencia en el cálculo de la media;
- Y el conocimiento de la influencia de los valores nulos en el cálculo de la media.

El estudio pretende dar respuestas a algunas preguntas de investigación, relacionadas con la comprensión de este concepto, tales como: ¿Qué niveles de comprensión predominan en nuestros alumnos, según las respuestas presentadas a las tareas dadas? ¿Qué diferencias se manifiestan, en cuanto a los niveles de comprensión, entre los alumnos de secundaria y los alumnos universitarios? ¿Actúan de forma coherente en los problemas de respuesta abierta, aquellos alumnos que indican la respuesta correcta en los problemas de elección múltiple relacionados?

Los objetivos indicados concuerdan con las tres tareas referidas, cuya descripción se presenta en el apartado sobre metodología. Su elección del conjunto de las demás tareas que integraban el cuestionario amplio se debe a que son las que nos proporcionaron más información, y cuyos propósitos se corresponden plenamente con las cuestiones de investigación referidas en este trabajo.

# Investigaciones previas

Hacemos aquí una revisión resumida de las principales investigaciones realizadas sobre la comprensión de los promedios. En este análisis, incluimos también algunos datos sobre las investigaciones que más directamente están relacionadas con nuestro estudio, para delimitarlo mejor y poder establecer diferencias entre nuestros resultados y los encontrados por otros autores.

Como hemos dicho, los estudios sobre la media aritmética indican lo complejo que es la comprensión de este concepto, a pesar de su carácter elemental. Los estudios muestran dificultades de diferentes índoles: comprensión del algoritmo, comprensión del concepto y propiedades, uso de representaciones y del lenguaje, capacidades de argumentación, entre otras. Por ejemplo, Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que incluso algunos estudiantes universitarios no toman en consideración las frecuencias al resolver problemas de media ponderada. Los resultados encontrados por Mevarech (1983) indican que una explicación posible de los errores de los alumnos en el cálculo de la media, es que se comportan como si un conjunto de números, junto con la operación media aritmética constituyera un grupo algebraico, que satisface los cuatro axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso. Los resultados del estudio de Strauss y Bichler (1988), con 80 alumnos, repartidos en cuatro grupos de edades 8, 10, 12 y 14 años y que no habían recibido instrucción sobre las propiedades de la media aritmética, no encontró efectos significativos con respecto al tipo de datos y medio de representación empleado. Sus resultados sugieren una mejora de la comprensión con la edad y muestran que los alumnos presentan más dificultades en comprender que la suma de las desviaciones de los datos respecto de la media es cero; que hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media y que la media es un representante de los datos a partir de los que ha sido calculada. Los resultados concernientes a las dificultades en las propiedades, fueron también confirmados por Leon y Zawojewski (1991). Los resultados del estudio de Mokros y Russell (1995) con 21 niños entre el cuarto y octavo grado, identificaron y analizaron cinco construcciones básicas sobre representatividad: La media como moda, la media como algoritmo, la media como algo razonable, la media como punto medio y la media como punto matemático de equilibrio. Los resultados del estudio de Cai (1995), con 250 alumnos de sexto, mostraron que el 90% de los alumnos conocían el mecanismo de "sumar todo y dividir" que constituye el algoritmo de cálculo. Sin embargo, sólo algunos de ellos mostraron evidencias de comprender el concepto. El estudio sugirió que el concepto de media aritmética no sólo es muy complejo respecto del algoritmo de cálculo, sino que también debería ser impartido más allá del propio algoritmo. En un trabajo de Batanero, Godino y Navas (1997) se han identificado errores conceptuales y dificultades de aplicación práctica de los conocimientos sobre promedios en 273 maestros de Primaria en formación. Las dificultades se relacionaban con el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de los promedios, posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas, elección de la medida de tendencia central más adecuada en una determinada situación y el uso de los promedios en la comparación de distribuciones. El estudio de Gattuso y Mary (1998), sobre la media ponderada, con 598 estudiantes de la enseñanza secundaria, de 13 a 15 años de edad, concluyó que no existe paralelismo entre la comprensión conceptual y el número de años de instrucción en la materia dada. Observaron, por otro lado, que las estrategias preferidas por los estudiantes de mayor edad eran más algebraicas y además obtenían mejores resultados cuando calculaban medias de conjuntos de datos agrupados, mientras que los más jóvenes preferían usar el conjunto de datos sin agrupar, aunque mostraron un nivel de éxito superior en aquéllos problemas en que se conoce la media y se deben averiguar algunos de los datos iniciales. Cobo y Batanero (2004) presentan un trabajo en que continúan las investigaciones sobre las dificultades que los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria tienen con las medidas de tendencia central. Los resultados encontrados identificaron que en torno a la mitad de los alumnos de 4º son capaces de resolver problemas de media ponderada, dando ponderaciones adecuadas, mientras que en 1º, sólo alrededor de un 10% lo realiza correctamente. Además encontraron errores de cálculo y aplicación incorrecta de otras propiedades.

En García Cruz y Garrett (2006a; 2006b), se muestran dificultades relacionadas con las capacidades de argumentación. Se analizan las actuaciones de los estudiantes ante preguntas de respuestas abiertas relacionadas con preguntas de respuestas de elección múltiple. Observaron que los alumnos no son consistentes con sus afirmaciones, puesto que para una misma situación utilizaban criterios completamente diferentes.

Los trabajos que describiremos a continuación, están relacionado directamente con algunos de nuestros objetivos. Por ejemplo, en Watson y Moritz (1999) se analiza la aplicación del promedio, por los estudiantes, en un contexto de resolución de problema, en el que se compara conjuntos de datos presentados de forma gráfica. El estudio se realiza con 88 estudiantes de tercero a noveno grado. Al comparar dos gráficos de tamaños diferentes sólo 2, de los 37 alumnos de quinto a séptimo, y 8 alumnos de los 28 de noveno utilizaron la media para comparar los conjuntos. En los contextos más complejos, en conjuntos de tamaños desiguales, las respuestas encontradas fueron categorizadas en tres niveles: uniestructural, cuando se referían simplemente a la comparación visual; multiestructural, cuando usaban diversos pasos en la comparación visual o en los cálculos numéricos que involucraban la media para comparar grupos; y relacionales, cuando integraban toda la información adecuada tanto sobre la comparación visual como sobre el cálculo de medias, al validar una decisión respecto al grupo que consideraban mejor. En Watson y Moritz (2000) se investiga, longitudinalmente, el desarrollo de la compresión de la noción de promedios en niños de 8 a 15 años, de tercer a noveno grado. El estudio se ha basado en entrevistas dirigidas a 137 estudiantes y se realizó en tres fases. Se estableció una caracterización jerárquica de las respuestas de los alumnos en seis niveles de comprensión. Los primeros cuatro niveles describen el desarrollo del concepto de promedio partiendo de ideas coloquiales, en descriptores procedimentales o conceptuales que inducían una medida de posición central de un conjunto de datos. Los dos niveles más altos estaban representados por la transferencia de esta comprensión a una o más aplicaciones en tareas de resolución de problema relativas a la inversión del algoritmo de cálculo y de cálculo de una media ponderada. Los resultados indicaron que para un gran número de niños el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución (idea próxima al concepto de mediana). Pocas veces se relaciona la palabra "average" con la moda y menos aún con la media aritmética. La caracterización de las respuestas, según los niveles de comprensión, ha mostrado una cierta tendencia de mejora en los niveles de respuestas cuanto más alto es el grado cursado.

# Marco conceptual

Según Schroeder (1987), los educadores matemáticos han estado siempre preocupados por la comprensión de los estudiantes a lo largo de los años, pero en las últimas décadas, la actividad y el progreso en esta área han sido substanciales. Esta idea es corroborada por Hiebert y Carpenter (1992), quienes afirman que hay un consenso general dentro de la comunidad de educación matemática de que los estudiantes deberían comprender las matemáticas. Según ellos, el objetivo de muchas investigaciones y la implementación de esfuerzos en esta área de enseñanza han estado relacionados con la promoción del aprendizaje de forma comprensiva. Indican, además, que el problema de la comprensión es un tema que se extiende más allá de las fronteras de la educación matemática.

Asimismo, al examinar los trabajos de distintos autores, como Skemp (1976, 1979), Hiebert y Lefevre (1986), Sierpinska (1990), Sfard (1991), Godino (1996), entre otros, hemos podido constatar numerosos modelos y conceptualizaciones en torno de la comprensión. Este hecho, nos ha indicado que los autores se acercan al significado de "comprensión" desde distintos puntos de vista, aunque algunos análisis tengan elementos comunes.

En nuestro estudio tratamos de seguir los fundamentos de la teoría neopiagetiana descrita en Biggs y Collis (1982; 1991). Dicha teoría, constituye un modelo jerárquico de estudio del desarrollo cognitivo de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, dentro de un conjunto de tareas limitadas a un dominio. Se conoce, también, como taxonomía SOLO, cuyo acrónimo se refiere a la estructura de los resultados observados en el aprendizaje (structure of the observed learning outcome).

Biggs y Collis (1982; 1991) señalan que el referido modelo puede usarse para evaluar el aprendizaje cualitativo de los estudiantes, o para establecer los objetivos de un plan curricular, ya que los estudiantes manifiestan una secuencia consistente, o ciclo de aprendizaje, a medida que van desarrollando sus competencias. Dicho ciclo es generalizable a una gama de tareas y en particular a tareas escolares básicas, en las que se puede analizar jerárquicamente la complejidad estructural de las respuestas de los mismos, en cualquier forma de representación bajo la cual se expresa el aprendizaje.

En el referido marco conceptual son distinguibles los niveles preestructural, uniestructural, multiestructural y relacional. El nivel preestructural está asociado con las respuestas iniciales e indica que el aprendizaje es demasiado bajo con respecto al nivel de abstracción que exige la tarea. El estudiante se muestra despistado o atraído por aspectos sin ninguna relevancia. En el nivel uniestructural se sitúan aquellos estudiantes que se centran en el dominio adecuado de la tarea pero consideran sólo un aspecto dentro del mismo. El nivel multiestructural se caracteriza por el hecho de que el estudiante aprende, cada vez, más características adecuadas y correctas, pero presenta dificultades en integrarlas. En el nivel relacional, el estudiante integra las diferentes partes para, con ellas, completar una estructura coherente y significativa.

Basándose en el modelo anterior algunos autores desarrollaron sus marcos de estudio para caracterizar el comportamiento de los alumnos en la resolución de problemas. Por ejemplo, Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1997; 1999) propusieron un modelo para describir el pensamiento probabilístico de los estudiantes en cuatro dominios específicos. Watson y Moritz (2000), establecen seis niveles de desarrollo evolutivo o de comprensión sobre el concepto de promedio.

La caracterización de Jones *et al.* (1997), contempla cuatro niveles de comprensión. El nivel 1, denominado pensamiento subjetivo asociado con el nivel preestructural, siguiendo la clasificación de Biggs y Collis (1982; 1991). En este nivel el estudiante está empeñado en la tarea, pero se muestra distraído y llega a conclusiones erróneas para aspectos irrelevantes de la misma. El nivel 2 se considera de transición entre el pensamiento subjetivo y el pensamiento informal cuantitativo. Los alumnos en este nivel muestran una disposición favorable a reconocer el significado de las medidas cuantitativas. Indican que sus pensamientos parecen estar en concordancia con lo que Biggs y Collis (1982; 1991) denominaron por nivel uniestructural, en el sentido de que la tarea fuerza al estudiante dar una respuesta, aunque en general sólo se alcanza un aspecto. El nivel 3 involucra el uso del pensamiento cuantitativo informal. El pensamiento de los estudiantes en este nivel se manifiesta en el uso de estrategias al enumerar resultados de experimentos y por la capacidad de coordinar y cuantificar sus pensamientos. Para ellos, los estudiantes evaluados en este nivel parecen exhibir características, tanto del nivel multiestructural como relacional, comparando con el modelo de Biggs y Collis (1982; 1991), ya que reconocen más de una característica relevante en una tarea y tienden a integrar diferentes características. El nivel 4 lo denominan razonamiento numérico. Señalan que los estudiantes que exhiben este nivel de pensamiento hacen conexiones precisas, entre los diferentes resultados, en las tareas propuestas y son capaces de usar medidas numéricas válidas. Matizan que el pensamiento de estos estudiantes es consistente con las características del nivel relacional, es decir, ahora integran aspectos relevantes de la tarea en una estructura significativa y generan abstracciones mientras estas abstracciones se relacionan con sus experiencias de la vida.

La caracterización de Watson y Moritz (2000) se fundamenta en las respuestas de los estudiantes a cuatro problemas sobre la media aritmética. Los niveles encontrados se describen a continuación:

- Respuestas preestructural o prepromedio: Aquellas que no se relacionan claramente con ningún concepto de promedio. No se llega a usar la idea de promedio, ni siquiera de forma coloquial o con referencia a contextos cotidianos.
- Respuestas uniestructural: Se relacionan con el uso coloquial de la media, donde es interpretada como normal o bueno, se emplean ideas imaginarias en el contexto de la tarea. Se relaciona con la idea de suma, pero no se conoce el algoritmo correcto, no se comprende el significado y se observa poco progreso en tareas complejas. En general, las respuestas en este nivel consisten de un único aspecto relevante del dominio del conjunto de tareas.
- Las respuestas multiestructural contemplan dos o más aspectos del dominio de la tarea, usando expresiones como la mayoría, la mitad y suma más división para describir la media en situaciones sencillas, aunque no sea capaz de aplicar en situaciones complejas. Se confunden la media, la mediana y la moda y se producen errores en los algoritmos de cálculo. Se muestra conflicto entre el cálculo incorrecto de la media y el concepto.
- Media como representante (nivel Relacional): Las respuestas en este nivel relacionan la media con su algoritmo en situaciones sencillas y a veces, también la asocian con las ideas de mayoría y mitad. Recurren al algoritmo de cálculo para describir los conceptos. Asocian el algoritmo de la media con la posibilidad de un resultado en forma decimal. Se expresa alguna idea de representatividad para la estimación o predicción en un conjunto de datos. No se sabe aplicar en contextos complejos y con frecuencia prefieren usar las características visuales de los gráficos en lugar de sus promedios.
- Aplicación de la media en un contexto complejo: Además de las capacidades del nivel anterior es capaz de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media, o calcula medias ponderadas pero no ambas cosas a la vez. No tiene clara la idea de distribución, raramente usan la media para comparar más de un conjunto de datos.
- Aplicación de la media en dos o más contextos complejos: Además de las características anteriores, es capaz a la vez de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media y calcular medias ponderadas. Comprende la idea de distribución. Usan la media frecuentemente para comparar dos o más conjuntos de datos.

Aunque la caracterización de Watson y Moritz (2000) podría ser un marco ideal para apoyar nuestro estudio, entendemos que no era completamente compatible con nuestros propósitos, puesto que la misma nos pareció ajustarse más al análisis del uso cotidiano del término promedio en los dos contextos señalados en el referido estudio (número de horas dedicadas a ver televisión y número de hijos en una familia). Además, en nuestro estudio algunas respuestas proporcionadas por ciertos alumnos nos obligaron a considerar un nivel intermedio entre el nivel multiestructural y el relacional, por lo que era importante establecer explícitamente los niveles resultantes de la categorización general, para ayudar a distinguir qué tipos de respuestas correspondieron a uno u otro nivel. Otro aspecto tenido en cuenta, es que nosotros tratamos de cruzar cuestiones de respuesta de elección múltiple con cuestiones de respuesta abierta y así analizar las eventuales incoherencias de los alumnos al contestar dos cuestiones que tenían propósitos similares, a pesar de la diferencia de formato.

En definitiva, los objetivos de nuestro trabajo son diferentes, en comparación con los planteados por aquellos autores y nuestro cuestionario general, de donde extraemos las tareas que presentamos en este estudio, lo conforman diversos problemas que contemplan varios contextos, teniendo en cuenta el propósito general para el cual fue diseñado, aunque en este trabajo, sólo reflejamos tres situaciones: tiempo recorrido por un estudiante en la distancia de los 100 metros, peso real de un objeto pequeño y número de peces capturados.

En consecuencia de lo anteriormente expresado, nos propusimos trabajar con el modelo original de Biggs y Collis (1982; 1991), estableciendo cinco niveles de comprensión: preestructural, uniestructural, multiestructural, transición entre el nivel multiestructural y el relacional y por último el nivel relacional. Esta clasificación se fundamenta en el análisis realizado a las respuestas de los estudiantes que participaron en el estudio experimental, y cuya descripción se mostrará en el apartado correspondiente al análisis y categorización de respuestas en este mismo trabajo.

# Metodología

## Muestra

El estudio fue realizado con un total de 227 alumnos. De estos, 130 eran estudiantes de la enseñanza secundaria, pertenecientes al penúltimo curso previo al ingreso en la universidad, con edades comprendidas entre los 16 y 21 años. Los restantes 97 eran estudiantes en una facultad de educación, 31 de la especialidad de matemática y 66 de la de pedagogía. Las edades de éstos últimos variaban entre los 22 y 49 años.

Los estudiantes de secundaria y los universitarios de la especialidad de pedagogía habían recibido enseñanza sobre estadística descriptiva en el curso anterior, mientras que los estudiantes de la especialidad de matemática, habían estudiado estadística inferencial, puesto que la asignatura de estadística descriptiva no consta en los planes de estudio de esta especialidad.

## Instrumento de recogida de datos

Los datos de este estudio fueron recogidos mediante la administración de un cuestionario constituido por nueve problemas, algunos de ellos con apartados, completando un total de 13 ítemes. El cuestionario es parte de un estudio más amplio que estamos desarrollando sobre la comprensión del concepto de media aritmética. En este análisis presentamos sólo tres problemas: dos son de respuestas abiertas y uno es de respuesta de elección múltiple. Su elección, como ya señalamos anteriormente, se debe a que son, de los que componen el cuestionario, los que nos proporcionaron más información, y cuyos propósitos se corresponden plenamente con las cuestiones de investigación referidas en este trabajo.

A continuación presentamos la descripción de cada tarea:

**Problema "Tiempo recorrido en los 100 metros":** A petición del profesor de educación física, 10 alumnos registraron de forma independiente y simultánea, el tiempo recorrido por un estudiante en la distancia de los 100 m. Los tiempos registrados (en segundos) fueron los siguientes:

15'05; 14'95; 15'05; 15; 10; 15; 14'90; 15; 14'95; 15;

¿Qué tiempo debe considerar el profesor como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante y por qué?

Se trata de un problema de respuesta abierta, creado por nosotros, a partir de un problema de respuestas de elección múltiple desarrollado por Garfield (2003), que denominamos problema "En una clase de ciencia", y que describiremos a continuación. Nuestra intención con el mismo es comparar las actuaciones de los alumnos en este problema y las que presenten en el problema de respuestas de elección múltiple, para profundizar en los resultados observados en García Cruz y Garrett (2006a; 2006b), con relación a la inconsistencia en las actuaciones de los mismos en dos tipos diferentes de preguntas que tienen relación. La tarea, evalúa el uso de la media como mejor estimador de un valor desconocido en presencia de errores de medición, la influencia de los valores atípicos en el cálculo de la media, así como la posible confusión en los alumnos entre la media y otras medidas de tendencia central.

**Problema "En una clase de ciencia":** Nueve estudiantes pesaron un objeto pequeño con un mismo instrumento. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6'2; 6'0; 6'0; 15'3; 6'1; 6'3; 6'2; 6'15; 6'2

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos les recomendarías?

(Marcar una sola de las siguientes respuestas)

a. Usar el número más repetido, que es 6'2.
b. Usar 6'15, puesto que es el dato con más cifras decimales.
c. Sumar los 9 números y dividir la suma por 9.
d. Desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.

Como señalamos, este problema fue adaptado de Garfield (2003). Con él, pretendíamos examinar los aspectos conceptuales de la media aritmética mencionados en el problema anterior. Queríamos también ver si la idea de mayor precisión era interpretada como la presencia de más cifras decimales. La diferencia con el problema anterior es que este problema es un problema de elección múltiple. Este hecho serviría para analizar las actuaciones de los alumnos en dos tipos diferentes de problemas que tienen el mismo objetivo.

**Problema "Peces capturados":** El número de peces capturados por seis alumnos en una actividad de ocio, es 3, 4, 5, 3, 1, y 2 respectivamente, que hace un promedio de 3 peces por alumno [(3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2)/6]. Más tarde se descubrió que en la actividad había participado otro alumno que no pescó ningún ejemplar. ¿Crees que cambiará el valor medio de peces capturados por cada alumno, al considerarse este último alumno? Justifica tu respuesta.

Este problema fue adaptado de Strauss y Bichler (1988), y abarca los aspectos abstracto y estadístico de esta medida, pues hay que tener en cuenta el cero en el cálculo de la media y la media se ve afectada si se añade un valor distinto de su valor respectivamente. Se trata de un problema de reparto equitativo, donde se pretende averiguar si el alumno sabe que los valores nulos influyen en el cálculo de la media cuando se quiere que el reparto sea justo.

Como se puede ver, las dos primeras tareas se relacionan con los dos primeros objetivos de investigación, mientras que la última está asociada especialmente al tercer objetivo.

## Análisis y categorización de las respuestas

Las respuestas de los alumnos, tanto las presentadas en los problemas de respuestas abiertas como las indicadas en los problemas de opción múltiple, fueron clasificadas en categorías. La clasificación obedeció al esquema planteado por Biggs y Collis (1982; 1991) y utilizado por Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1997; 1999) y Watson y Moritz (2000), considerando las estructuras de las respuestas de los estudiantes.

En el nivel preestructural se clasificaron las respuestas que indicaban un nivel bajo de aprendizaje con respecto al nivel de abstracción que exigía la tarea, o que expresaban fundamentos de carácter subjetivo, mostrando que el estudiante estaba despistado o atraído por aspectos irrelevantes. En algunas respuestas el alumno da simplemente una afirmación y no argumenta, presenta ideas incompletas, o muestra no haber hecho ningún intento real de dar una respuesta estructurada apoyada en evidencias.

En el nivel uniestructural, consideramos aquellas respuestas que están fundamentadas en ideas imaginarias y/o relacionadas con sus experiencias de lo cotidiano. En algunas de ellas, el estudiante se centra en un aspecto del dato y lo usa para justificar su respuesta, o considera un atributo concreto dentro de sus propias experiencias, estimándolo suficiente para la situación.

En el nivel multiestructural situamos aquellas respuestas en las que el alumno trabaja en la dirección de la tarea, muestra algunas características adecuadas de la misma, pero no integra correctamente los diferentes elementos, fundamentalmente porque atribuye significados diferentes al requerido en la tarea. Por ejemplo, utiliza la moda o la mediana en un problema que requiere el uso del mejor estimador, sin considerar el contexto del mismo. El estudiante en este nivel muestra un conocimiento aislado de definiciones, fórmulas, algoritmos y procedimientos.

En nuestra investigación consideramos un nivel intermedio entre el nivel multiestructural y el relacional, que denominamos nivel de transición. En este nivel situamos las respuestas de aquellos alumnos, cuyos pensamientos se manifiestan por el uso de razonamientos adecuados, llegando incluso a proporcionar vías correctas y coordinadas. Reconocen adecuadamente los aspectos requeridos por la tarea, y sus respuestas se acercan cada vez más a la estructura deseable, e incluso podrían considerarse correctas en algunos casos. Sin embargo, sus ideas necesitan de un refinamiento (perfeccionamiento), pues, aún no muestran una estructura coherente y significativa en lo que exige la tarea.

Por último, consideramos el nivel relacional. Aquí, al contestar la tarea el estudiante hace conexiones precisas entre los diferentes elementos. Integra las diferentes partes, definiciones, propiedades, fórmulas, algoritmos, procedimientos, condiciones de aplicación, en el proceso de desarrollo de la misma y con ellas completa una estructura coherente y significativa.

Los niveles descritos anteriormente, pueden verse más claramente, con los ejemplos que se presentan a continuación, que ilustran el tipo de respuestas dadas por los alumnos en cada problema.

## Problema "Tiempo recorrido en los 100m"

- Respuestas de tipo preestructural (P)

Las respuestas clasificadas en este nivel, fueron del tipo siguiente:

- Se debe considerar 10 segundos porque es el que llegó en primero lugar;
- El tiempo real que el estudiante recorrió debe ser de 10 segundos, porque en 100 metros sería el tiempo ideal;
- Se debe considerar 10 segundos como estimación del tiempo real porque 10 x 10 = 100;
- Para estimar el tiempo, el profesor debe considerar 14'95 segundos. Una vez que recorrió 100 metros, debemos tener en cuenta la intención, el esfuerzo, el coraje, entre otros factores;
- El tiempo considerado es de 10 segundos;
- Se debe considerar 10 segundos. Como el profesor trata de evaluar el tiempo, este no puede estar por encima de 10 segundos.
- Es 15 segundos, porque para un estudiante, en la distancia de 100 m, depende de su forma y capacidad para realizar este tipo de deporte o actividad y debe estar bien preparado;
- El tiempo que el profesor debe considerar como estimación del tiempo real es 15 segundos.

- Respuestas de tipo uniestructural (U)

En este nivel, clasificamos aquellas respuestas que expresan ideas tales como las siguientes:

- Se debe considerar el tiempo de 10 segundos porque es el tiempo más corto;
- El profesor debe considerar los 10 segundos porque 10 es el número más próximo del record mundial actualmente;
- El profesor debe considerar como mejor estimación, el tiempo de espacio más corto;
- Se debe considerar el mayor tiempo porque los segundos pasan rápido;
- El profesor debe considerar los 10 segundos porque es el tiempo más reducido, y podemos decir que el alumno es más rápido;
- Se debe considerar 10 segundos porque en una carrera de 100 metros el tiempo mínimo es de 9'60, para mí seria casi imposible y si el profesor quiere considerar un tiempo tiene que ser 10 segundos. Además 10 es el número más próximo;
- Se debe considerar 15'05 segundos porque se repite dos veces;

- El tiempo que el profesor debe considerar como estimación del tiempo real es 15 segundos porque ningún alumno pasa de los 15’90.

- Respuestas de tipo multiestructural (M)

  En esta clasificación, incluimos las respuestas del tipo:

- El profesor debe considerar como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante el valor 15 segundos porque de los datos presentados es el que más se repite;
- El profesor debe considerar como estimación del tiempo real el valor 14’90 segundos porque es el que más se aproxima a la media 14’49;
- El tiempo que el profesor debe considerar es 15 segundos porque de los 10 alumnos 4 registraron este tiempo;
- Ninguno de los valores, porque los datos están dados de forma bruta. Es necesario agruparlos y después hallar la media del tiempo recorrido por el alumno;
- Se debe usar la mediana, que es el valor que está entre la quinta y la sexta posición.

También se clasificaron en este nivel, aquellas justificaciones en las que se presentaba el algoritmo de cálculo de la media, pero sin identificar correctamente el total de datos o la suma total.

- Respuestas en el nivel de transición (T)

De las respuestas caracterizadas en este nivel, algunos alumnos utilizan la media para estimar el valor desconocido en la situación presentada. Sin embargo no se dan cuenta de que en el conjunto de valores hay un dato extraño que es necesario descartar, antes de efectuar el cálculo, por lo que suman todos los valores y dividen por el total de observaciones, tal como se ilustra en las respuestas que se muestra a continuación:

- La suma de los tiempos registrados es 144’9. Dividiendo encontramos 14’49. Por tanto el tiempo es 14’49 segundos.
- El tiempo que debe considerar el profesor como estimación del tiempo real recorrido por el estudiante es 14’49, porque

$$\frac{15'05+14'95+15'05+15+10+15+14'90+15+14'95+15}{10} = \frac{144'9}{10} = 14'49$$

En algunas respuestas los alumnos redondean erróneamente el valor medio calculado con todos los valores a un valor entero, como se muestra en el ejemplo siguiente:

- Se debe considerar el valor 14’49≈15, porque para hallar la media es preciso sumar y dividir por la cantidad de números sumados.

A continuación, mostramos otros ejemplos de respuestas que fueron clasificadas en este nivel.

- El profesor debe considerar como estimación, el tiempo de 14’90, porque es el número que más se aproxima a la media 14’49.
- El tiempo que el profesor debe considerar es 15 segundos, porque

$$\overline{x} = \frac{15'05+14'95+15'05+15+10+15+14'90+15+14'95+15}{10} = \frac{14'49}{10} = 14'49$$

El valor medio no se encuentra en estos intervalos, entonces sería 15 segundos, por ser el tiempo real recorrido.

Fórmula $\overline{x} = \dfrac{15'05+14'95+15'05+15x4+10+14'90+14'95}{10}$ ; x = 75'6 s

Es el tiempo que el profesor debe considerar como estimación.

- Respuestas en el nivel relacional (R)

En este nivel, clasificamos aquellas respuestas que indicaban que para estimar el valor pretendido se debía determinar la media aritmética de los valores dados, pero, descartando antes, el valor 10 segundos, por ser una observación extraña en el conjunto de datos. Sin embargo, en este problema no encontramos ninguna respuesta que se asoció con este nivel como se mostrará en los resultados.

Veamos ahora otro ejemplo en un problema, en este caso de elección múltiple, que tenía estrecha relación con el problema anterior, en cuanto a sus objetivos.

## Problema "En una clase de ciencias"

Al tratarse de un problema de respuesta de elección múltiple la caracterización se asoció con el distractor presente en cada opción. En su primitiva forma sólo se contemplaron respuestas asociadas a los niveles multiestructural, transición y relacional. Consideramos la posibilidad de incluir el tipo de respuestas relativas a los niveles que faltan para completar la gama de elección en una revisión futura del cuestionario.

En cuanto a la caracterización tenemos:

- Respuestas de tipo multiestructural (M)

Aquellas en las que el alumno elige la opción que dice "usar el número más repetido, que es el 6'2", cuya interpretación es que se sugiere como respuesta la moda, una medida que no tiene la propiedad de mejor estimador en la situación dada y la opción "usar 6'15, puesto que es el valor con más cifras decimales", deduciéndose que el alumno confunde mayor precisión con existencia de más cifras decimales.

- Respuestas en el nivel de transición (T)

Aquellas en las que el sujeto elige la opción "sumar todos los valores y dividir la suma por el total de datos". Aquí, interpretamos que conocen la media como mejor estimador de un valor desconocido en presencia de errores de medida, pero no reconocen la observación que se distingue de las demás. Estrada (2002) señala que esta respuesta podría considerase parcialmente correcta, pues el alumno usaría la idea de media como mejor estimador, pero no tendría en cuenta la falta de robustez de esta medida frente a valores atípicos.

- Respuesta de tipo relacional (R)

Aquí, fueron caracterizadas aquellas respuestas en las que los alumnos marcaban la opción que sugería descartar el valor 15'3, sumando los otros 8 números y dividiendo por 8. Es decir, el alumno usa la media como mejor estimación de un valor desconocido, en presencia de errores de medición, y además, parece saber que en estas situaciones es necesario atender a los valores extremos.

## Problema "Peces capturados"

En este problema, observamos diferentes tipos de respuestas, cuya clasificación referida a los niveles de comprensión es la que mostramos a continuación mediante algunos ejemplos:

- Respuesta de tipo preestructural (P)

  En este nivel incluimos las respuestas del tipo:

- La media de peces capturados por alumno no se altera, porque este mismo... [No continua la respuesta];
- No, porque el alumno que había participado en la actividad aunque no capturó ningún pez, no podía considerase porque él ya había participado;
- No varía, aunque se considere la participación del otro alumno;
- Varía, al considerase la participación del otro alumno;
- No varía. El hecho de este no haber capturado un ejemplar no deja de ser pez y además no sabemos cuantos peces capturó. Pero también creo que la expresión que dice aunque no tenga capturado ningún pez, significa que este alumno no existe.

- Respuesta de tipo uniestructural (U)

  Algunas respuestas situadas en este nivel fueron las siguientes:

- Sí varía, porque $\frac{18}{6} = 3$;
- Sí, varía porque si ellos hicieran la división con el alumno que hizo la pesca clandestinamente... [No sigue con el argumento, pero a continuación pone: $= 3+4+5+3+1+2= \frac{26}{6} = 4$];
- Sí varía, porque se ha considerado la media de 3 peces por cada alumno y se ha dividido el número de peces por el número de alumnos que participaron en la actividad;
- No varía, porque se halló el resultado de peces, lo que significa que alguien pescó más que la media, cubriendo al alumno que no pescó;
- Sí se altera, porque algunos participaron pero no capturaron nada, lo que quiere decir que algunos de ellos capturaron más que otros.

- Respuesta de tipo multiestructural (M)

  Algunas de las respuestas, clasificadas en este nivel, fueron las siguientes:

- La media de peces no varía, aunque se considere el último alumno, porque cero es un valor nulo;
- La media no cambia, porque el último alumno no pescó ningún ejemplar, y aunque se considere, no cambia nada;
- El valor medio de peces no varía porque el último alumno no capturó ningún ejemplar, luego, la media sigue siendo la misma;
- El valor medio es lo que se llama de variación media y esta no varía, porque a pesar de que uno de ellos no capturó ningún pez, él es parte del grupo y no debe ser excluido.

En algunos casos, las respuestas que decían que el valor medio de peces no variaba porque el alumno no capturó ningún ejemplar, se acompañaban de un intento de comprobación, utilizando el algoritmo de cálculo de la media: (3+4+5+3+1+2)/6.

- <u>Respuestas en el nivel de transición (T)</u>

Ejemplificamos a continuación los tipos de respuestas que fueron caracterizadas en este nivel:

- No varía porque considerando el séptimo alumno el resultado será el mismo. No es 3, pero redondeando se obtiene 3. Ejemplo:

$$\frac{18}{6} = 3; \quad \frac{18}{7} = 2'571 \approx 3.$$

- $$\frac{3+4+5+3+1+2}{7} = \frac{18}{7} = 2'571$$

No varía porque este último alumno no capturó ningún pez.

- (3+4+5+3+1+2+0)/7 = 2'5 ≈ 3. Varía porque ellos eran 7 alumnos. En el resultado la media se halló con 6 alumnos.
- No varía, porque la media sería 2'57 y redondeando por exceso se obtiene 3.
- Sí. Aunque él no pescó nada debe ser contado en la actividad. ... debe llevarse también alguna cosa.
- $$\frac{3+4+5+3+1+2}{6} = 3 \qquad \frac{3+4+5+3+1+0+2}{7} = 2'57 \approx 3$$

El valor varía porque la suma es igual a 18, dividiendo por 7 el resultado es de 2'57 que al redondear da 3.

- <u>Respuestas de tipo relacional (R)</u>

Veamos algunos ejemplos de respuestas caracterizadas en este nivel:

- Sí varía, aunque él no pescó nada debe ser contado en la actividad, puede que él nunca participara en la actividad, pero se va a llevar también alguna cosa;

- Yo tengo la certeza que varía al considerarse el último alumno porque en este caso se involucra un alumno más y al efectuar la media el resultado debe cambiar;

- Lógicamente la media de peces capturados se altera porque al incluir un elemento más, la media baja de 3 a 2'57;

- El número medio varía, porque con el último alumno no se divide por 6 pero sí por 7 y dará otro resultado que es equivalente a 2'57.

Finalmente, los alumnos que dejaron en blanco las preguntas fueron categorizados con el código NC.

# Resultados y discusión

Los resultados se presentan según cada problema, donde mostramos las frecuencias absolutas y los porcentajes según el nivel de comprensión y según la procedencia de cada alumno (secundaria o universidad). De la comparación de los datos sacamos algunas conclusiones de la actuación de los alumnos.

En la tabla 1 mostramos los datos relativos al problema "Tiempo recorrido en los 100 metros". La tarea, se encuadra en el campo de problemas y situaciones del que emerge el concepto de media aritmética (Batanero y Godino, 2001). Además de descubrir que la media aritmética es el mejor estimador de una cantidad desconocida en presencia de errores de medición, se debía también analizar si, en el proceso de obtención de los datos, no se introdujo algún valor extraño.

Los datos muestran que ninguna de las respuestas presentadas en este problema estuvo asociada con el nivel relacional, tanto en los alumnos de secundaria como en los universitarios. El reconocimiento de la observación atípica y su consecuente exclusión en el cálculo de la media, al usar esta medida como el mejor estimador del tiempo que el estudiante recorrió en los 100 metros, resultó una situación completamente desconocida por los alumnos.

**Tabla 1.- Resultados en el problema "Tiempo recorrido en los 100 m".**

| | Secundaria | | Universitarios | |
|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % |
| NC | 16 | 12,3 | 10 | 10,3 |
| P | 14 | 10,8 | 11 | 11,3 |
| U | 15 | 11,5 | 6 | 6,2 |
| M | 47 | 36,2 | 36 | 37,1 |
| T | 38 | 29,2 | 34 | 35,1 |
| R | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Total** | **130** | **100,0** | **97** | **100** |

Pensamos que es debido a esto, el que la mayor parte de las respuestas se asociaron, en primer lugar, con el nivel multiestructural, con 47 (36'2%) alumnos en secundaria y 36 (37'1%) alumnos universitarios; y en segundo lugar, con el nivel de transición, en donde encontramos 38 (29'2%) respuestas en el grupo de secundaria y 34 (35'1%) en los de la universidad. En el primer caso, con respecto al nivel multiestructural, las respuestas indican que los alumnos tienen ciertos conocimientos, como resultado de la enseñanza que han recibido, pero no lo asocian con el objetivo de la tarea. Unos alumnos escriben el algoritmo de cálculo de la media de forma incorrecta; otros indican el valor más frecuente, es decir, la moda; y otros utilizan la mediana, incluso mal definida, como mejor estimador. En el segundo caso, las respuestas presentadas revelan un conocimiento cercano al nivel relacional, aunque estén necesitadas de ciertos refinamientos. Estas respuestas indican que el alumno reconoce la media como la medida que reúne la propiedad de mejor estimador en las circunstancias dadas, faltándole solamente una apreciación más depurada de los datos proporcionados en el problema, que se debe traducir en la exclusión del valor atípico antes de calcular la media, para que el razonamiento fuese caracterizado como asociado al nivel relacional.

Las respuestas de tipo uniestructural se destacaron más en la secundaria, con un 11'5%, ante un 6'2% en los universitarios. Algunas respuestas de estos alumnos se basaron en argumentos derivados de sus propias experiencias, otras se centraron en un aspecto del dato o consideraron un atributo en concreto, estimándolos suficiente para la situación. En definitiva, parece que el alumno quiere contestar algo, encontrar una respuesta, no importándole si ésta contiene el argumento deseado.

Los datos relacionados con las respuestas de nivel preestructural fueron muy parecidos en los dos niveles de enseñanza. Encontramos un 11% aproximado de respuestas de este tipo en los estudiantes de secundaria y en los universitarios. En general, sus argumentos mostraban una laguna en la comprensión del problema presentado.

De forma global, los resultados evidencian que los alumnos desconocen el uso de la media como la medida que tiene la propiedad de mejor estimador de un conjunto de datos en presencia de errores de medición y la influencia que tienen los valores extremos en su cálculo. Aunque el reconocimiento de los valores atípicos sea una de las principales dificultades que tienen los alumnos en el cálculo de la media aritmética, nos sorprende considerablemente que de los alumnos evaluados no encontrásemos al menos uno que se diera cuenta de la existencia del dato extraño en el conjunto de valores que se proporcionaron, si atendemos a la variabilidad de nuestra población, en donde creemos que, al menos, los universitarios poseen diferentes experiencias de la vida, para indagar sobre lo poco probable que resultaría encontrar un alumno que haga un tiempo de 10 segundos en la carrera de 100 metros, ya que muchos atletas profesionales de alto rendimiento no llegan siquiera a obtener esta marca.

Las dificultades con los valores atípicos también fueron observadas en el estudio de Batanero, Godino y Navas (1997), con maestros de primaria en formación, donde explican que las mismas se deben a la descontextualización de la enseñanza de la estadística recibida en sus estudios previos y la falta de un conocimiento de lo aprendido. Nosotros estamos de acuerdo con este planteamiento, pues, constatamos, a través de una encuesta realizada a profesores que imparten la asignatura de estadística, que, en general, los conocimientos sobre la influencia de los valores, y sobre cuándo se debe o no descartarlos en el cálculo de la media, no son abordados de forma expresa.

En el problema "En una clase de ciencia" los resultados encontrados fueron algo diferentes, comparados con los encontrados en el problema anterior, a pesar de que los objetivos a evaluar eran los mismos. Pensamos que esto se debe a que este problema es de respuesta de elección múltiple, mientras que el anterior es de respuesta abierta. Los datos encontrados se resumen en la tabla 2.

**Tabla 2: Resultados en el problema "En una clase de ciencias".**

| | Secundaria | | Universitarios | |
|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % |
| NC | 3 | 2'3 | 0 | 0 |
| P | 0 | 0 | 0 | 0 |
| U | 0 | 0 | 0 | 0 |
| M | 47 | 36,2 | 44 | 45,4 |
| T | 61 | 46,9 | 41 | 42,3 |
| R | 19 | 14,6 | 12 | 12,4 |
| **Total** | **130** | **100,0** | **97** | **100,0** |

Las opciones de respuesta del problema sólo reflejaban las caracterizadas como de nivel multiestructural, de transición y relacional. A pesar de que cada alternativa por sí misma, ofrecía pistas sobre la respuesta más factible, el número de sujetos que indicó la opción de nivel relacional fue reducido. Solamente encontramos 19 (14'6%) alumnos de secundaria y 12 (12'4%) en el grupo de alumnos universitarios, lo que muestra, en este estudio, la poca diferencia en términos de razonamiento entre estos dos grupos en la resolución de la tarea. El nivel relacional se asoció con la opción que sugería descartar el valor 15'3, y calcular la media sólo con los otros 8 números, para así determinar con la mayor precisión posible el peso real de un objeto pequeño, medido con un mismo instrumento.

Con relación a las respuestas en el nivel de transición, éstas reflejan que los alumnos conocen la media aritmética como el mejor estimador de una medida en presencia de errores de medición pero sin atender al valor atípico, los datos muestran 61 (46'9%) alumnos de secundaria que razonaron en este sentido y 41 (42'3%) alumnos universitarios.

Los datos referentes a las respuestas asociadas con el nivel multiestructural fueron de 47 (36'2%) y 44 (45'4%) alumnos en secundaria y universidad, respectivamente. Este nivel lo asociamos con las respuestas referentes al valor más repetido o al uso del valor con más cifras decimales.

Con la finalidad de desvelar algunas diferencias encontradas en los datos, en lo que se refiere a las actuaciones de los alumnos en el problema de respuesta abierta y en el problema de elección múltiple, ya que los mismos cubrían básicamente los mismos objetivos, cruzamos los resultados encontrados en cada nivel de enseñanza.

En la tabla 3, mostramos los resultados con los alumnos de secundaria.

**Tabla 3: Cruce de resultados en el problema de respuesta abierta "Tiempo recorrido en los 100 m" (en filas) y en el problema de respuesta de elección múltiple "En una clase de ciencias" (en columnas), con los alumnos de secundaria.**

| | | Problema "En una clase de ciencias" | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | NC | M | T | R | |
| Problema "Tiempo recorrido en los 100m" | NC | 0 | 8 | 6 | 2 | 16 |
| | P | 1 | 4 | 9 | 0 | 14 |
| | U | 1 | 9 | 4 | 1 | 15 |
| | M | 1 | 22 | 19 | 5 | 47 |
| | T | 0 | 4 | 23 | 11 | 38 |
| **Total** | | **3** | **47** | **61** | **19** | **130** |

En primer lugar haremos el análisis de las actuaciones de los alumnos en los problemas de respuesta abierta, a partir de una respuesta indicada en el problema de elección múltiple. De los datos, identificamos que de los 19 alumnos que seleccionaron la respuesta caracterizada en el nivel relacional en el problema de elección múltiple (R, en columna), al contestar el problema de respuestas abiertas (en filas), 11 habían indicado un argumento que se caracterizaba como de nivel de transición entre el nivel multiestructural y el relacional. Del resto, observamos 5 que presentaron justificaciones asociadas con el nivel multiestructural y 1 con el nivel uniestructural.

Asimismo, vemos que de los 61 alumnos cuyas respuestas fueron situadas en el nivel de transición, en el problema "En una clase de ciencias", sólo 23 dieron una respuesta de mismo nivel en el problema de respuesta abierta. La mayoría presentó respuestas situadas en los niveles inferiores, e incluso 6 no contestaron al referido problema.

Haciendo ahora el análisis inverso, observamos que de los 38 estudiantes que en el problema de respuesta abierta dieron una respuesta situada en el nivel de transición entre el multiestructural y el relacional (en filas), 11 (alrededor del 29%) de los mismos eligieron la opción de nivel relacional en el problema de elección múltiple, 23 (aproximadamente 61%) seleccionaron la opción de nivel de transición y 4 (10'5%) seleccionaron la opción que se clasificó en el nivel multiestructural.

Los comportamientos de los estudiantes para profesores fueron análogos a los descritos anteriormente, tal como se muestra en la tabla 4.

Vol.17 Nº 1 Marzo 2008 // INVESTIGACIÓN

**Tabla 4: Cruce de resultados en el problema de respuesta abierta "Tiempo recorrido en los 100 m" (en filas) y en el problema de elección múltiple "En una clase de ciencias" (en columnas), con los alumnos universitarios.**

| | | Problema "En una clase de ciencias" | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| | | M | T | R | |
| Problema "Tiempo recorrido en los 100m" | NC | 4 | 4 | 2 | 10 |
| | P | 3 | 6 | 2 | 11 |
| | U | 2 | 2 | 2 | 6 |
| | M | 25 | 7 | 4 | 36 |
| | T | 10 | 22 | 2 | 34 |
| Total | | 44 | 41 | 12 | 97 |

Así, vemos que de los 12 alumnos que presentan respuestas clasificadas en el nivel relacional, en el problema de respuesta de elección múltiple ("En una clase de ciencia"), sus respuestas en el problema de respuesta abierta, se asociaron con los niveles de transición (2), multiestructural (4), uniestructural (2) e incluso preestructural (2). Otros 2 alumnos no contestaron.

Por otro lado, de los 41 alumnos que marcan la opción clasificada en el nivel de transición, en el problema de elección múltiple (en columnas), sólo poco más de la mitad (22) manifiesta ese tipo de razonamiento en el problema de respuesta abierta.

Analizando ahora las actuaciones de los alumnos en los problemas de elección múltiple, tras dar una respuesta en el problema de respuesta abierta, observamos que de los 34 alumnos que presentan la respuesta del nivel más alto (Transición) en el problema de respuesta abierta, 2 de ellos seleccionan la alternativa de tipo relacional en el problema de elección múltiple, 22 marcan la alternativa situada en el nivel de transición y 10 en la de nivel multiestructural.

Estas inconsistencias nos hacen pensar que algunos alumnos han contestado el problema de elección múltiple sin tener en cuenta un conocimiento de referencia, ya que para situaciones similares consideran argumentos diferentes, poniendo de manifiesto los resultados ya descritos en García Cruz y Garrett (2006a; 2006b).

A continuación, analizaremos los datos con el último problema, que denominamos "Peces capturados" que evaluaba la comprensión del efecto del cero en el cálculo de la media. Los resultados encontrados, se presentan en la tabla 5.

**Tabla 5: Resultados en el problema "Peces capturados", con los alumnos de secundaria y universitarios.**

| | Secundaria | | Universitarios | |
|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % |
| NC | 20 | 15,4 | 13 | 13,4 |
| P | 3 | 2,3 | 9 | 9,3 |
| U | 7 | 5,4 | 5 | 5,2 |
| M | 51 | 39,2 | 38 | 39,2 |
| T | 18 | 13,8 | 5 | 5,2 |
| R | 31 | 23,8 | 27 | 27,8 |
| **Total** | **130** | **100,0** | **97** | **100,0** |

Tanto en el grupo de secundaria, como en el de los universitarios, las respuestas clasificadas en el nivel multiestructural fueron las que tuvieron mayor frecuencia, siendo igual en los dos grupos (39'2%). Las mismas se asociaron, principalmente, con argumentos que expresan que el valor medio no varía al tomar en consideración al alumno que no pescó ningún ejemplar. Así se considera que el cero es un valor nulo que no afecta al resultado, aunque algunos intentan ilustrar sus ideas planteando la fórmula de cálculo de la media manteniendo el total con seis alumnos.

Los datos también muestran que hay más respuestas de nivel de transición en la muestra de alumnos de secundaria, 13'8%, que en la muestra de alumnos universitarios, donde sólo encontramos un 5'2%. Algunas respuestas situadas en este nivel ilustran, mediante la representación simbólica, que el total de datos ya no es el mismo, es decir, pasa de 6 a 7; sin embargo, redondean el resultado a un valor entero, encontrando la misma media calculada con 6 alumnos y dando como respuesta que la media no varía, mostrando así que la media no puede ser un valor decimal para estos alumnos. Algunos alumnos, a pesar de mostrar en sus cálculos el aumento en el total de datos, justifican verbalmente que la media no varía ya que un alumno no pescó ningún ejemplar.

En cuanto a las respuestas de nivel relacional, aquellas que muestran que el alumno ha desarrollado una imagen mental compacta y holística del concepto, de acuerdo con la situación presentada, en nuestros resultados sólo encontramos 31 (alrededor del 24%) alumnos en secundaria y 27 (28%) alumnos universitarios. Los resultados indican hasta qué punto esta tarea ha resultado difícil, incluso para los alumnos universitarios, ya que cerca del 72% de los mismos no han podido presentar una respuesta asociada al nivel relacional. Esto nos lleva a ser escépticos respecto del tipo de enseñanza que desarrollarían estos futuros profesores, si no llegan a superar los obstáculos que presentan en la comprensión de las nociones que exige la tarea.

Por otro lado, constatamos también respuestas situadas en los dos niveles de comprensión más bajos. Con respecto al nivel uniestructural, los porcentajes fueron casi iguales (5'4% en los de secundaria y 5'2% en los universitarios). En las respuestas caracterizadas en este nivel se ve que el alumno intenta repetir la fórmula expuesta en el enunciado, además de presentar un argumento simple centrado en un aspecto del dato, usándolo sin ajustarse al objetivo pretendido.

Con respecto a las respuestas de nivel preestructural, los datos muestran un porcentaje relativamente superior (9'3%) en los estudiantes para profesores en comparación con el dato observado en los estudiantes de secundaria (2'3%), aunque esta diferencia no sea llamativa. Este tipo de respuestas se relacionan con aquellas situaciones en las que el alumno no justifica su afirmación, presentando exclusivamente una proposición afirmativa o negativa, o utilizando un argumento que indica que no ha comprendido la tarea.

Nuestros análisis apoyan los estudios de Strauss y Bichler (1988) y Leon y Zawojewski (1991). Estos han revelado que la comprensión de la propiedad sobre la influencia del cero en el cálculo de la media resulta difícil a los alumnos, tal vez por su carácter abstracto. Strauss y Bichler sugieren revisar los materiales curriculares para el estudio de las propiedades de la media, adaptándolos adecuadamente a la construcción del concepto, desarrollar distintas actividades y analizar su repercusión en la enseñanza. Leon y Zawojewski destacan que es muy importante suministrar un contexto concreto.

# Conclusiones

Nuestro estudio ha permitido observar diferentes tipos de dificultades con los alumnos. Los resultados encontrados nos han revelado que los alumnos no están familiarizados con la noción de valor atípico, por lo que no tienen idea de cómo actuar con estos datos en el cálculo de la media aritmética. Si nos fijamos en los problemas que evalúan esta noción, observamos que no hubo respuestas de nivel relacional cuando los alumnos contestaron el problema de respuesta abierta, e incluso con respecto al problema de elección múltiple relacionado, las respuestas caracterizadas en ese nivel fueron exiguas, a pesar de que la misma respuesta, proporciona una pista que podría orientar al alumnado.

Observamos también que algunos alumnos no reconocen que la media es la medida de tendencia central que posee la propiedad de mejor estimador. En situaciones donde debían usar esta medida, prefirieron la moda, que no tiene la propiedad de mejor estimador (Batanero et al., 1997) o indicaron un valor que no reunía las características exigibles.

Otra dificultad confirmada es que los alumnos no son conscientes de la influencia de los valores nulos en el cálculo de la media; otros, a pesar de reconocer la alteración que este dato ejerce en el total de observaciones, redondean el valor medio calculado a un número entero, lo que parece mostrar que no aceptan que la media pueda ser un valor decimal.

En general, los resultados evidencian que los alumnos encuestados no están familiarizados con algunas de las propiedades principales de la media aritmética, a pesar de su carácter elemental. Y lo que es más llamativo: no hubo diferencias significativas entre los estudiantes de secundaria y los universitarios, en cuanto a los niveles de interpretación observados. Obviamente, esperábamos un mejor desempeño por parte de los estudiantes universitarios, si atendemos a que ellos son de un nivel de escolaridad superior y se supone que poseen una mayor madurez y tienen más experiencia. Algunos incluso deberán impartir en un futuro estos contenidos. Aquí, no coincidimos con los resultados de Watson y Moritz (1999) que afirman que el nivel de comprensión aumenta con el grado cursado.

A nuestro modo de ver, las dificultades surgen porque los alumnos no están familiarizados con los aspectos conceptuales de la media. Estudian el algoritmo de cálculo, utilizan las representaciones, pero las propiedades más tangibles no son abordadas de forma expresa. Según nuestra constatación, los alumnos podrían determinar la media aritmética de un conjunto particular de datos, si esto es lo que se les pide, porque la mayoría muestra conocer el algoritmo de cálculo. Sin embargo este conocimiento procedimental no se enlaza con los aspectos conceptuales, poniendo de manifiesto la conclusión subrayada en Mokros y Russell (1995) sobre la pobre comprensión conceptual que presentan algunos estudiantes que conciben la media como un puro algoritmo.

En consecuencia, concordamos con los planteamientos descritos anteriormente sobre la importancia de contextualizar las tareas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. También creemos que sería importante diversificar los contextos de los problemas en la enseñanza, es decir, no insistir en los contextos habituales o los más conocidos por los alumnos, ya que esto limita el pensamiento de los mismos. Pensamos que la diversificación de los contextos, ayuda al estudiante a percibir y analizar diversas situaciones más allá de su entorno y les proporciona bases para afrontar distintos tipos de problemas.

En especial, entendemos que nuestro trabajo tiene algunas implicaciones apreciables para la enseñanza. En primer lugar, los resultados del estudio podrían familiarizar a los profesores con diferentes tipos de respuestas que presentan los estudiantes al interpretar las propiedades analizadas. El conocimiento de los errores y dificultades asociadas a estas cuestiones, podrían orientar una correcta aplicación de los conocimientos previos acumulados por los estudiantes en la adquisición de nuevos esquemas conceptuales, de modo que éstos no se conviertan en obstáculos cognitivos (Herscovics, 1989; Sierpinska, 1990), tal como ocurrió, por ejemplo, con los alumnos que creyeron que el cero no influye en el cálculo de la media, como si estuviesen tratando con el elemento neutro de la adición.

Por otro lado, se podrían utilizar algunos tipos particulares de respuestas para su discusión en el aula, mediante la confrontación entre conocimientos inadecuados y conocimientos apropiados, ya que ésta es una de las posibilidades señaladas para mejorar la comprensión en el aprendizaje (Watson, 2007).

# Referencias


Batanero, C. y Godino, J. D. (2001). Developing New Theoretical Tools in Statistics Education Research. Proceedings of the 3rd Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI (Tome LIX, Book 2, 137-142), ISI, Seul.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de Maestros de Primaria en Formación sobre los Promedios. VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa, 310-324.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1982). Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy. New York: Academic Press.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. En H. A. H. Rowe (Ed.), Intelligence: Reconceptualization and measurement (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), Proceedings of the XIX Conference on the Psychology of Mathematics Education (v.3, pp.144-151). Universidad de Pernambuco.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Razonamiento numérico en problemas de promedios. Suma, 45, 79-86.

Estrada, A. (2002). Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Gal, I. (1995). Statistical Tools and Statistical Literacy: The Case of the Average. Teaching Statistical, 17 (3), 97-99.

García Cruz, J. A. y Garrett, A. J. (2006b). Students' actions in open and multiple-choice questions regarding understanding of averages. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.). Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 161-168. Prague: PME.

García Cruz, J.A. y Garrett, A. J. (2006a). On average and open-end questions. Proceedings of the 7 th International Conference on Teaching Statistics. Salvador de Bahia, Brazil.

Garfield, J.B. (2003). Assessing Statistical Reasoning. Statistical Education Research Journal 2 (1), 22-38.

Gattuso, L. y Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school students. Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics (pp. 685-691). Singapur. Available in http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning and understanding. Proceedings of the 20th PME Conference (v.2, 417-424), Ed. L. Puig y A. Gutierrez, Universidad de Valencia.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacle encountered in the learning of algebra. In S. Wagner y C. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp. 60-80). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. W. Grouws (Ed.), Handbook of research in teaching and learning of mathematics (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., y Mogill, A. T. (1997). A Framework for Assessing and Nurturing Young Children's Thinking in Probability. Educational Studies in Mathematics 32, 487-519.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., y Mogill, A. T. (1999). Students' Probabilistic Thinking in Instruction. Journal for Research in Mathematics Education, 30 (5), 487-519.

Leon, M. R. y Zawojewski, J. S. (1991). Use of the arithmetic mean: An investigation of four properties. Issues and preliminary results. En D. Vere- Jones (Ed.), Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics (pp. 302-306). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.

Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. Educational Studies in mathematic, 14, 415-429.

Mokros, J. y Russell, S. J. (1995). Children's Concepts of Average and Representativeness. Journal for Research in Mathematics Education, 26 (1), 20-39.

Pollatsek, A. Lima, S. y Well, A.D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. Educational Studies in Mathematics, 12, 191-204.

Schroeder, T. L. (1987). Students' understanding of mathematics: A review and synthesis of some recent research. En J. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds.), Psychology of mathematics Education XI, (Vol.3 pp. 332-338). Montreal: PME.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics, 10 (3), 24-41.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching 77, 20-26.

Skemp, R.R. (1979). Intelligence, Learning, and Action. A foundation for theory and practice in education. Chichester (etc.): John Wiley &Sons.

Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. Journal for Research in Mathematics Education, 19 (1), 64-80.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. Education Studies in Mathematics, 37, 145-168.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The Longitudinal Development of Understanding of Average. Mathematical Thinking and Learning, 2 (1 y 2), 11-50.

Watson, J.M. (2007). The role of cognitive conflict in developing students' understanding of average. Educational Studies in Mathematics, 65, 21-47.

Alexandre Joaquim Garrett
Juan Antonio García Cruz

Universidad de La Laguna.
Tenerife, España.

alexgarras@yahoo.com.br
jagcruz@ull.es