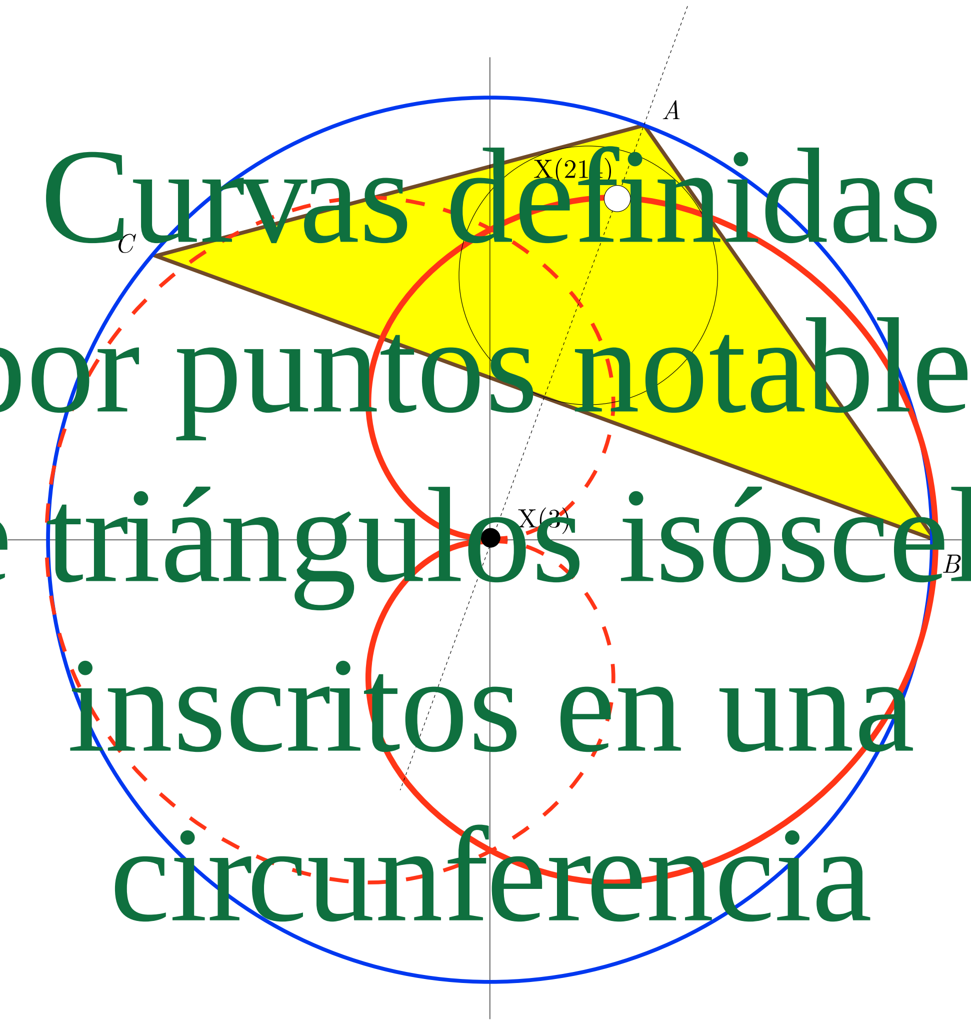
Curvas definidas por puntos notables de triángulos isósceles inscritos en una circunferencia



Curvas definidas por puntos notables relativos a triángulos isósceles inscritos en una circunferencia

Angel Montesdeoca

⊛ *PROBLEMA*

> Dados una circunferencia Γ y un punto fijo B en ella, se consideran los triángulos $\widehat{ABC}$ isósceles inscritos, con lado desigual BC. Lugar geométrico de los puntos $X(n)$ de ETC relativos a dichos triángulos.

Supondremos siempre que la circunferencia Γ tiene radio 1, su centro es el origen de coordenadas cartesianas o polares y el punto B está en el eje de abcisas o eje polar.

⊛ $X(1)$: *Incentro*

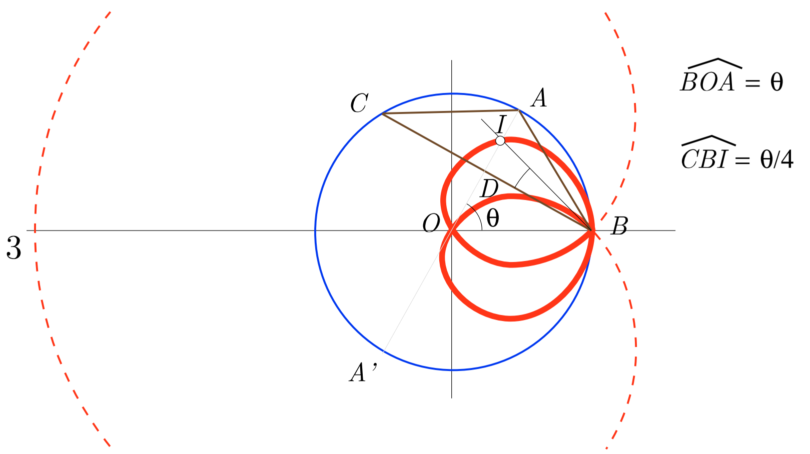
Punto de concurrencia de las bisectrices interiores de $\widehat{ABC}$.
Trilineales:

$$1 : 1 : 1$$

L.g.: (↻) Applet CabriJava Gráfica comprendida dentro de la circunferencia Γ.

$$\rho = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \operatorname{tag}\frac{\theta}{4}, \quad \text{ó} \quad \rho = \cos\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}}, \quad \text{ó} \quad \rho = 2\cos\frac{\theta}{2} - 1.$$

$$x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - 6x^4 - 12x^2y^2 - 6y^4 + 8x^3 + 8xy^2 - 3x^2 + y^2 = 0$$



⊛ $X(2)$: ***Barirentro***

Punto de concurrencia de las medianas (rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto).

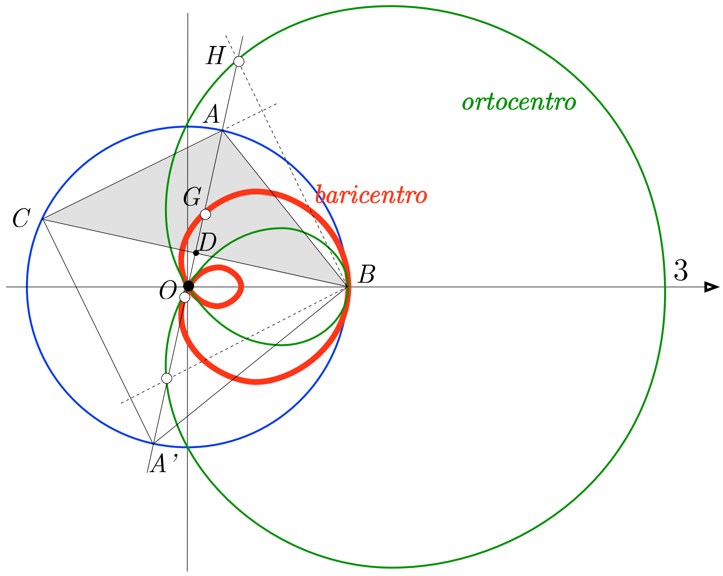
Trilineales:

$$\csc A : \csc B : \csc C$$

L.g.: (↺) Applet CabriJava

$$\rho = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\theta), \quad \text{ó} \quad \rho = \cos\theta + \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}.$$

$$9x^4 + 18x^2y^2 + 9y^4 - 12x^3 - 12xy^2 + 3x^2 - y^2 = 0.$$



⊛ $X(3)$: ***Circuncentro***

Punto de concurrencia de las mediatrices a los lados (perpendiculares en sus puntos medios).

Trilineales:

$$\cos A : \cos B : \cos C$$

L.g.: El centro de la circunferencia Γ dada.

⊛ $X(4)$: ***Ortocentro***

Punto de concurrencia de las alturas (perpendiculares por cada vértice al lado opuesto).

Anticomplemento de $X(3)$.

Trilineales:

$$\sec A : \sec B : \sec C$$

La curva que describe el ortocentro es homotética de la que describe el baricentro del triángulo (⊛), mediante una homotecia de centro el origen y razón 3.

L.g.: (↺) Applet CabriJava $\rho_4 = 3\rho_2 - 2\rho_3$. Coincide con el lugar geométrico de $X(149)$.

$$\rho = 1 + 2\cos\theta, \quad \text{ó} \quad \rho = \cos\theta + 2\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^3 - 4xy^2 + 3x^2 - y^2 = 0.$$

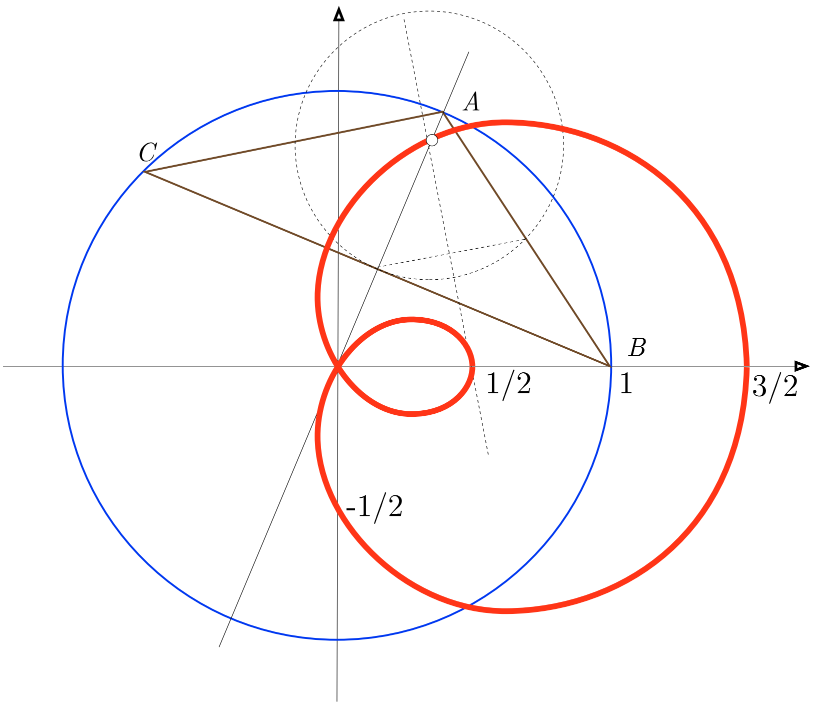
⊛ $X(5)$: *Centro de la circunferencia de los nueve puntos*

Circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados.
Complemento de $X(3)$.
Trilineales:

$$\cos(B - C) : \cos(C - A) : \cos(A - B)$$

Cada circunferencia de nueve puntos es tangente a la base del triángulo en su punto medio y tiene radio $1/2$. La curva que describe su centro es homotética de la que describe el baricentro del triángulo (⊛), mediante una homotecia de centro el origen y razón $3/2$.
L.g.: (↺) Applet CabriJava $\rho_5 = 3\rho_2/2 - \rho_3/2$.

$$\rho = \frac{1}{2} + \cos\theta. \qquad 4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 - 8x^3 - 8xy^2 + 3x^2 - y^2 = 0.$$



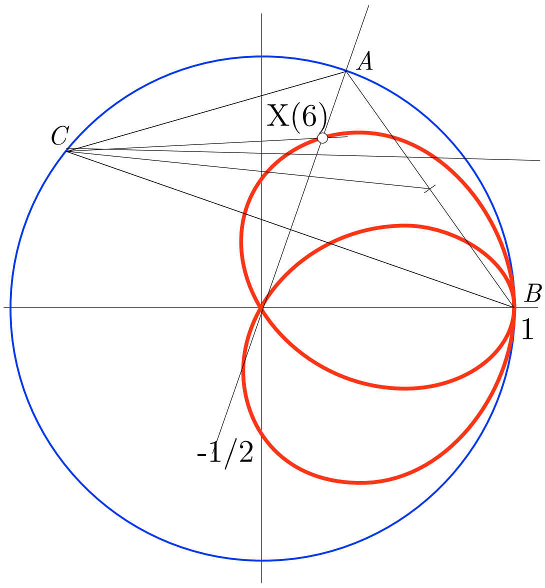
⊛ $X(6)$: *Punto de Lemoine*

Punto de intersección de las rectas simétricas de las medianas (simedianas) respecto a las bisectrices en cada vértice.
Trilineales:

$$\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C$$

L.g.: (↺) Applet CabriJava

$$\rho = \frac{1+2\cos\theta}{2+\cos\theta}, \qquad 3x^4+7x^2y^2+4y^4-6x^3-6xy^2+3x^2-y^2=0.$$



⊛ $X(7)$: ***Punto de Gergonne***

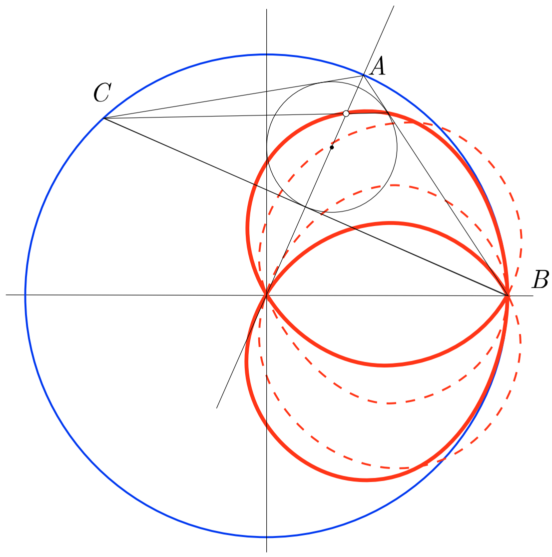
Punto de intersección de las rectas que une cada vértice con el punto de contacto de la circunferencia inscrita con lado opuesto.

Trilineales:

$$\sec^2(A/2) : \sec^2(B/2) : \sec^2(C/2)$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = \cos\theta + 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{4}, \quad \text{ó} \quad \rho = \frac{-2\,\cos\theta + \cos\dfrac{3\,\theta}{2}}{-2+\cos\dfrac{\theta}{2}}$$



⊛ $X(8)$: ***Punto de Nagel***

Punto de concurrencia de las rectas que pasan por cada vértice y por el punto del lado opuesto de contacto con la correspondiente circunferencia exinscrita.

Anticomplemento de $X(1)$.

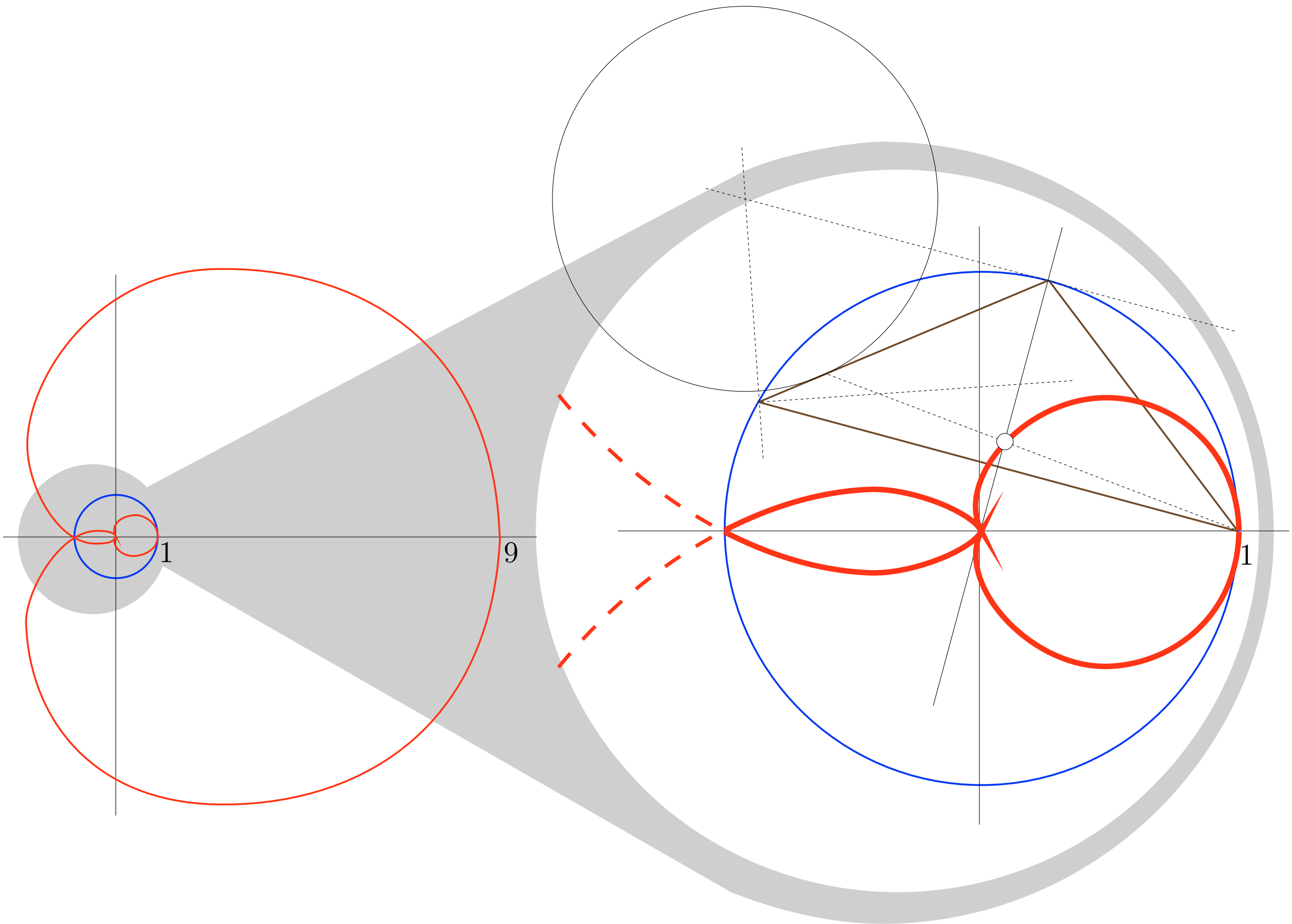
Trilineales:

$$\csc^2(A/2) : \csc^2(B/2) : \csc^2(C/2)$$

L.g.: Applet CabriJava $\rho_8 = 3\rho_2 - 2\rho_1$.

$$\rho = \left(1 - 2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2.$$

$$x^8 + 4x^6y^2 + 6x^4y^4 + 4x^2y^6 + y^8 - 8x^7 - 24x^5y^2 - 24x^3y^4 - 8xy^6 - 10x^6 - 54x^4y^2 - 78x^2y^4 - 34y^6 +$$
$$+8x^5 + 48x^3y^2 + 40xy^4 + 9x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 0$$



⊛ $X(9)$: ***Mittenpunkt***

Punto de intersección de las semidianas del triángulo excentral (con vértices en los centros de la circunferencia exinscritas). Complemento del punto de Gergonne, $X(7)$.

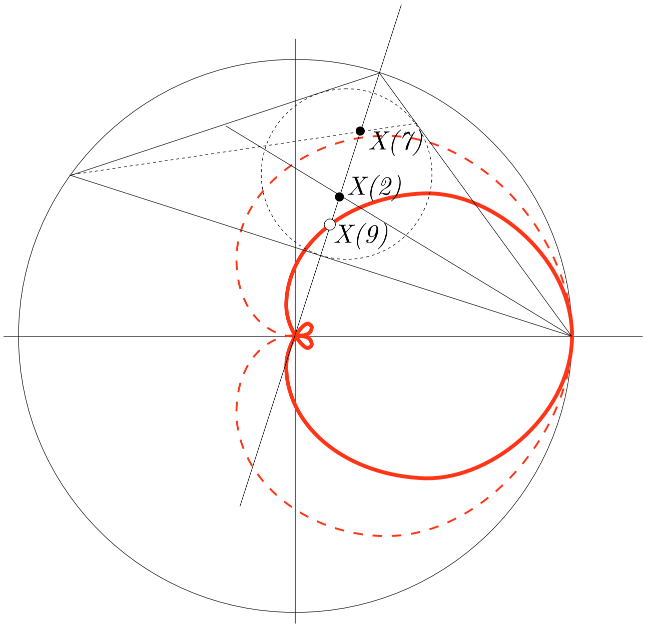
Trilineales:

$$\cot(A/2) : \cot(B/2) : \cot(C/2)$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = \frac{1 - \cos\dfrac{\theta}{2} + \cos\theta}{2 - \cos\dfrac{\theta}{2}}$$

$$48x^8 + 193x^6y^2 + 291x^4y^4 + 195x^2y^6 + 49y^8 - 96x^7 - 288x^5y^2 - 288x^3y^4 - 96xy^6 + 48x^6 +$$
$$+74x^4y^2 + 4x^2y^4 - 22y^6 + 24x^3y^2 - 3x^2y^2 + 24xy^4 + y^4 = 0.$$



$\triangle$
∇

⊛ $X(10)$**: *Centro de Spieker***

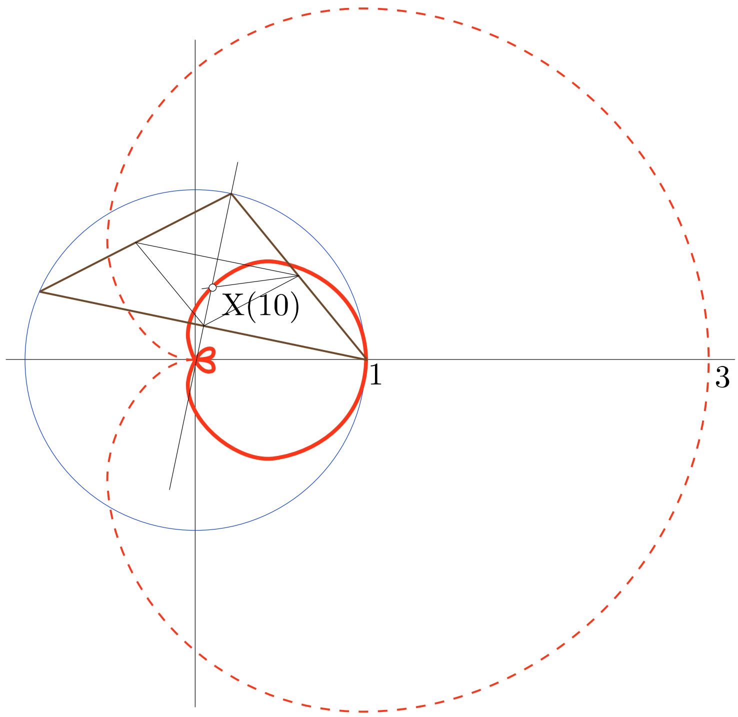
Incentro del triángulo medial. Complemento de $X(1)$.
Trilineales:

$$bc(b + c) : ca(c + a) : ab(a + b)$$

L.g.: Applet CabriJava $\rho_{10} = 3\rho_2/2 - \rho_1/2$.

$$\rho = 1 - \cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta$$

$$4x^8 + 16x^6y^2 + 24x^4y^4 + 16x^2y^6 + 4y^8 - 16x^7 - 48x^5y^2 - 16xy^6 - 48x^3y^4 + 12x^6 + 12x^4y^2 - 12x^2y^4 - 12y^6 +$$
$$+16x^3y^2 + 16xy^4 - 3x^2y^2 + y^4 = 0.$$



△
▽

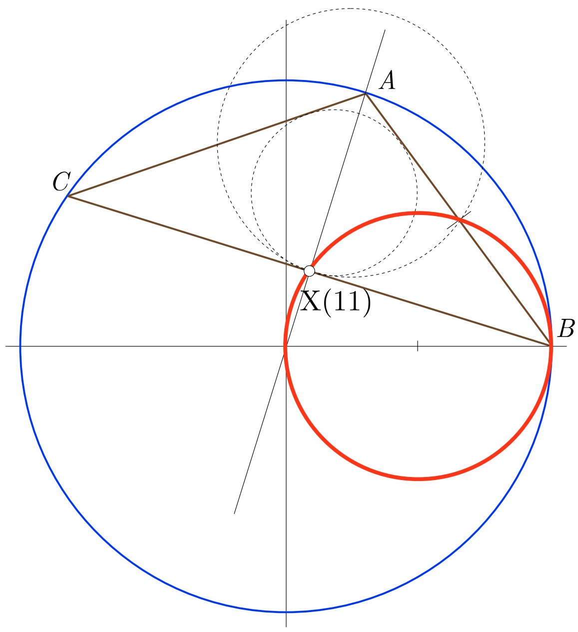
⊛ $X(11)$: ***Punto de Feuerbachs***

Punto de tangencia de la circunferencia de los nueve puntos con la circunferencia inscrita.
Trilineales:

$$1 - \cos(B - C) : 1 - \cos(C - A) : 1 - \cos(A - B)$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = \cos\theta, \qquad x^2 + y^2 - x = 0.$$



△
▽

⊛ $X(12)$: *Punto armónicamente conjugado del* $X(11)$, *respecto a* $X(1)$ *y* $X(5)$

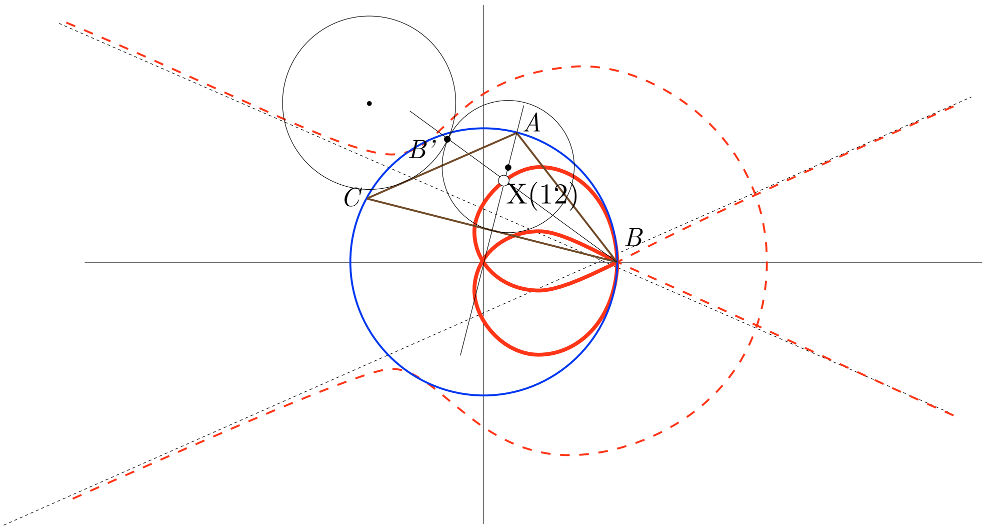
Punto de concurrencia de las rectas que pasan por cada vértice y por el punto de contacto de la circunferencia de los nueve puntos con las circunferencia exinscrita correspondiente a dicho vértice.

Trilineales:

$$1+\cos(B-C):1+\cos(C-A):1+\cos(A-B)$$

L.g.: Applet CabriJava $\rho_{12}=\dfrac{2\rho_1\rho_5-(\rho_1+\rho_5)\rho_{11}}{\rho_1+\rho_5-2\rho_{11}}$.

$$\rho=\frac{2\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\dfrac{3\,\theta}{4}\right)}{1+2\,\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{3\,\theta}{2}},\qquad \rho=\frac{3-6\cos\dfrac{\theta}{2}+3\cos\theta-2\cos\dfrac{3\theta}{2}+\cos 2\theta}{1-4\cos\dfrac{\theta}{2}+2\cos\theta}$$



△
▽

⊛ $X(13)$: *Primer punto de Fermat*

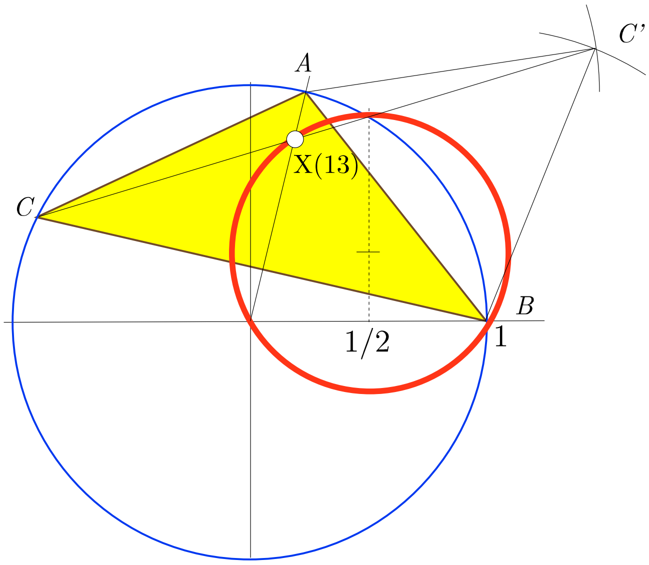
Punto de concurrencia de las rectas que pasan por cada vértice y por el vértice (distinto de los del triángulo dado) del triángulo equilátero construido externamente sobre el lado opuesto.

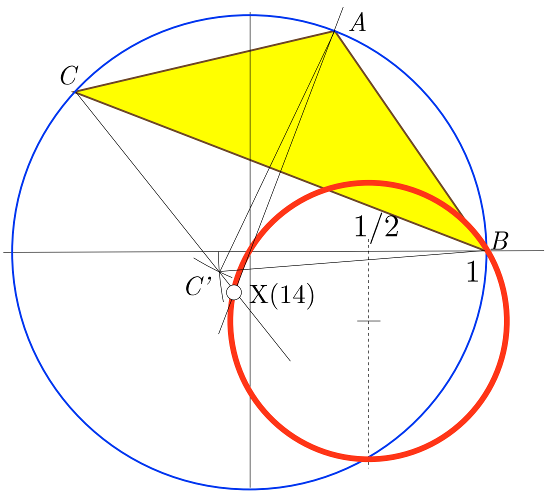
Trilineales:

$$\csc(A+\frac{\pi}{3}):\csc(B+\frac{\pi}{3}):\csc(C+\frac{\pi}{3})$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho=\frac{\cos(\dfrac{\theta}{2})\,\csc(\dfrac{4\,\pi}{3}-\theta)+\cos(\theta)\,\csc(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\theta}{2})}{\cos(\dfrac{\theta}{2})\,\csc(\dfrac{4\,\pi}{3}-\theta)+\csc(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\theta}{2})}$$





△
▽

⊛ $X(14)$***: Segundo punto de Fermat***

Punto de concurrencia de las rectas que pasan por cada vértice y por el vértice (distinto de los del triángulo dado) del triángulo equilátero construido internamente sobre el lado opuesto.

Trilineales:

$$\csc(A-\frac{\pi}{3}) : \csc(B-\frac{\pi}{3}) : \csc(C-\frac{\pi}{3})$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})\ \csc(\frac{2\,\pi}{3}-\theta) - \cos(\theta)\ \csc(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})\ \csc(\frac{2\,\pi}{3}-\theta) - \csc(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2})}$$

△
▽

⊛ $X(15)$***: Primer punto isodinámico***

Punto de intersección (distinto de lo vértices) de las circunferencias de diámetro el segmento determinado por los puntos de intersección de las bisectrices en un vértice con el lado opuesto.

Trilineales:

$$\operatorname{sen}(A+\frac{\pi}{3}) : \operatorname{sen}(B+\frac{\pi}{3}) : \operatorname{sen}(C+\frac{\pi}{3})$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = \frac{\cos\frac{\theta}{2}\ \operatorname{sen}(\frac{4\,\pi}{3}-\theta) + \cos\theta\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}+\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}\ \operatorname{sen}(\frac{4\,\pi}{3}-\theta) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}+\frac{\theta}{2})}$$

△
▽

⊛ $X(16)$: ***Segundo punto isodinámico***

Punto de intersección (distinto de lo vértices) de las circunferencias de diámetro el segmento determinado por los puntos de intersección de las bisectrices en un vértice con el lado opuesto.

Trilineales:

$$\operatorname{sen}(A-\frac{\pi}{3}) : \operatorname{sen}(B-\frac{\pi}{3}) : \operatorname{sen}(C-\frac{\pi}{3})$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho =$$

△
▽

⊛ $X(20)$: ***Punto de de Longchamps***

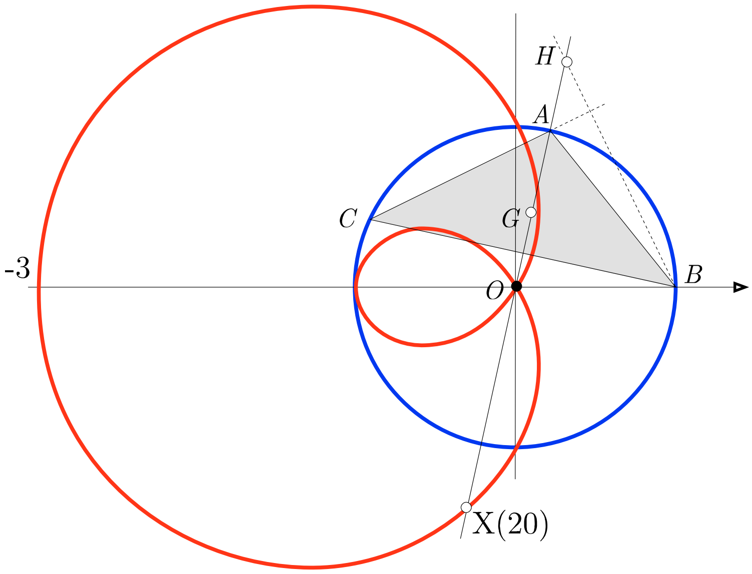
Punto simétrico del $X(4)$ respecto de $X(3)$. Anticomplemento de $X(4)$.

Trilineales:

$$\cos A - \cos B \cos C : \cos B - \cos C \cos A : \cos C - \cos A \cos B$$

L.g.: Applet CabriJava $\rho_2 0 = 3\rho_2/2 - \rho_4/2 = -\rho_4$.

$$\rho = -1 - 2\,\cos\theta, \qquad x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 4x^3 + 4xy^2 + 3x^2 - y^2 = 0.$$



△
▽

⊛ $X(25)$: ***Punto de de Longchamps***

Centro de homotecia de los triángulos órtico y tangencial

Polar del eje radical de la circunferencia de nueve puntos y la circunferencia circunscrita, respecto a la primera.

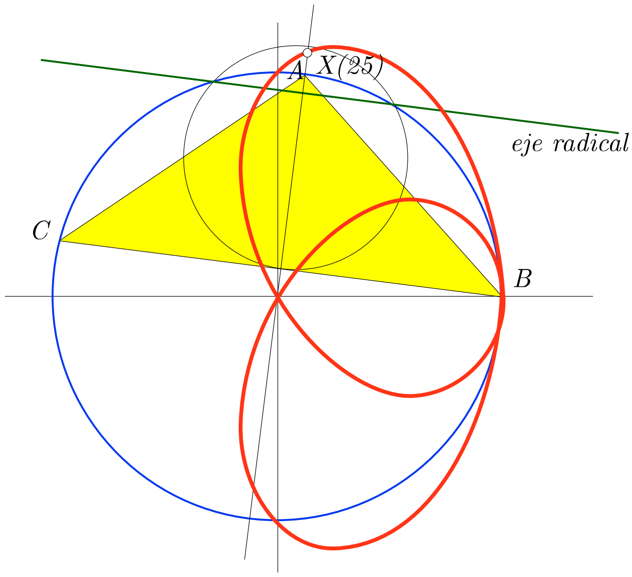
Trilineales:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{tag} A : \operatorname{sen} B \operatorname{tag} B : \operatorname{sen} C \operatorname{tag} C$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = \frac{2 + 4\cos\theta}{3 + 2\cos\theta + \cos 2\theta}$$

$$3x^4 + 3x^2y^2 + y^4 - 6x^3 - 2xy^2 + 3x^2 - y^2 = 0$$



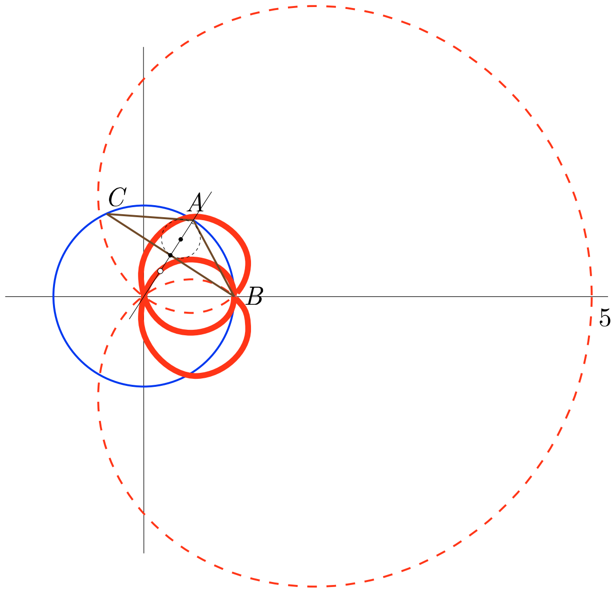
⊛ $X(80)$***: Simétrico del incentro*** $X(1)$ ***respecto al punto de Feuerbach*** $X(11)$

$$\frac{1}{1 - 2\cos A} : \frac{1}{1 - 2cosB} : \frac{1}{1 - 2cosC}$$

L.g.: Applet CabriJava

$$1 - 2\cos\frac{\theta}{2} + 2\cos\theta$$

$$x^8 + 4x^6y^2 + 6x^4y^4 + 4x^2y^6 + y^8 - 8x^7 - 24x^5y^2 - 24x^3y^4 - 8xy^6 + 18x^6 + 30x^4y^2 + 6x^2y^4 - 6y^6 - 16x^5 +$$
$$+16xy^4 + 5x^4 - 10x^2y^2 + y^4 = 0$$



⊛ $X(69)$: *Punto de intersección de las simedianas del triángulo anticomplementario*

Anticomplemento del $X(6)$

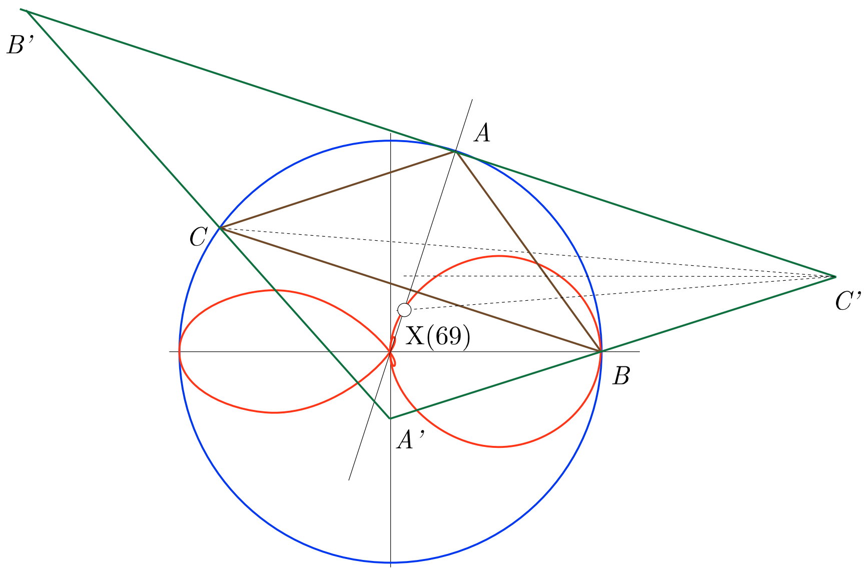
Trilineales:

$$\frac{\cos A}{a^2} : \frac{\cos B}{b^2} : \frac{\cos C}{c^2}$$

L.g.: Applet CabriJava $\rho_{69} = 3\rho_2 - 2\rho_6$.

$$\rho = \frac{1 + \cos\theta + \cos 2\theta}{2 + \cos\theta}$$

$$3x^6 + 10x^4y^2 + 11x^2y^4 + 4y^6 - 4x^3y^2 - 4xy^4 - 3x^4 + x^2y^2 = 0.$$



△
▽

⊛ $X(100)$: *Anticomplemento del punto de Feuerbach*

Centro de homotecia exterior de las circunferencias circunscrita a $\widehat{ABC}$ e inscrita a su triángulo anticomplementario.

Ambas circunferencias son tangentes en A y la segunda interior a la primera, por lo que el centro de homotecia exterior es el vértice A.

O bien, el punto de Feuerbach, $X(11)$, (punto de tangencia de la circunferencia de nueve puntos y la circunferencia inscrita) es el punto medio D de la base BC y como el baricentro triseca a la mediana AD el anticomplemento de D es el vértice A.

El lugar geométrico de $X(100)$ es la circunferencia circunscrita.

Trilineales:

$$(a - b)(a - c) : (b - c)(b - a) : (c - a)(c - b)$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = 1, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

△
▽

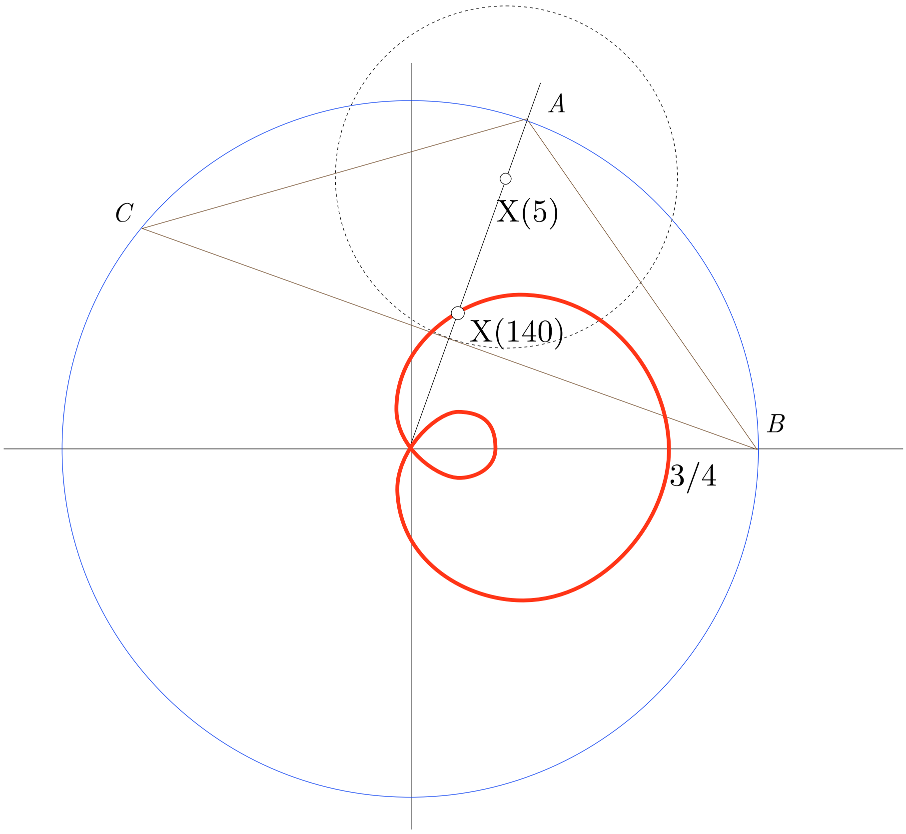
⊛ $X(140)$: ***Punto de de Longchamps***

Punto medio de $X(3)$ y $X(5)$. Complemento de $X(5)$.
Trilineales:

$$2\cos A + \cos(B - C) : 2\cos B + \cos(C - A) : 2\cos C + \cos(A - B)$$

L.g.: Applet CabriJava $\rho_{140} = 3\rho_2/2 - \rho_5/2 = (\rho_3 + \rho_5)/2$.

$$\rho = \frac{1}{4}(1 + 2\,\cos\theta), \qquad 16x^4 + 32x^2y^2 + 16y^4 - 16x^3 - 16xy^2 + 3x^2 - y^2 = 0.$$



⊛ $X(141)$: ***Complemento de*** $X(6)$

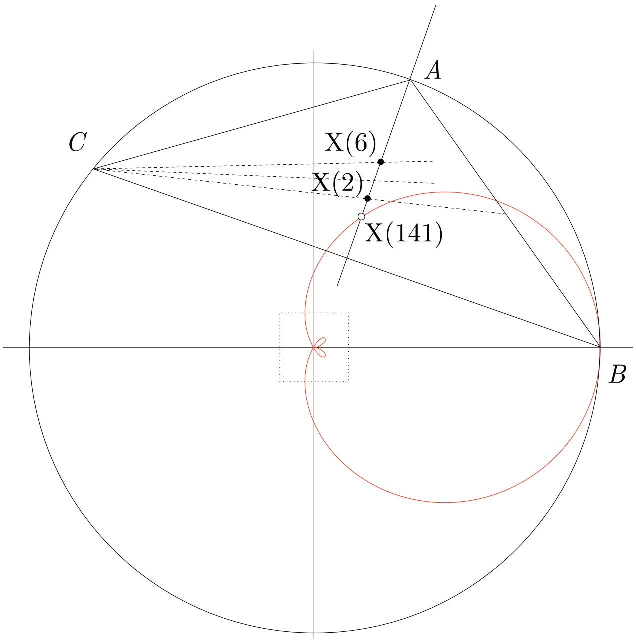
$X(6)$ del triángulo medial.
Trilineales:

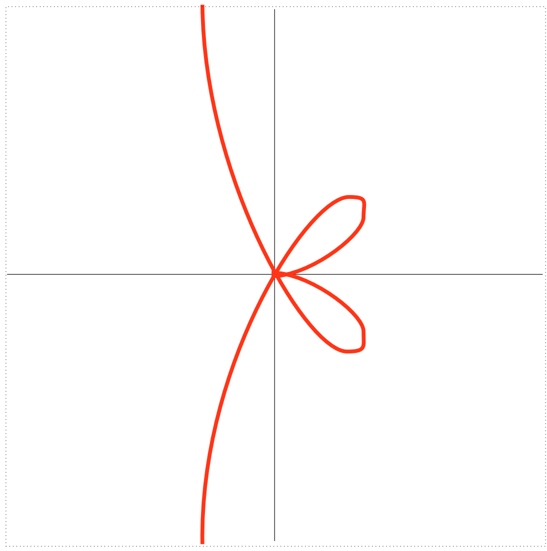
$$bc(b^2 + c^2) : ca(c^2 + a^2) : ab(a^2 + b^2)$$

L.g.: Applet CabriJava $\rho_{141} = 3\rho_2/2 - \rho_6/2$.

$$\rho = \frac{2 + 3\cos\theta + \cos 2\theta}{4 + 2\cos\theta}$$

$$12x^6 + 40x^4y^2 + 44x^2y^4 + 16y^6 - 12x^5 - 32x^3y^2 - 20xy^4 + 3x^2y^2 - y^4 = 0.$$





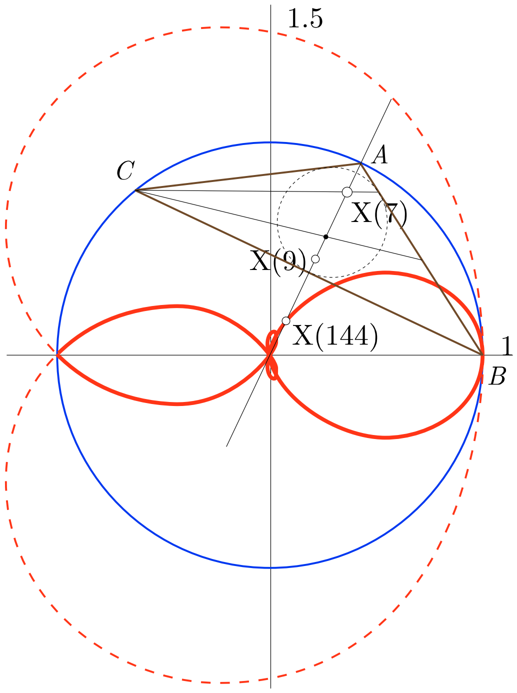
⊛ $X(144)$***: Anticomplemento del*** $X(7)$

Simétrico del punto de Gergonne, $X(7)$, respecto al Mittenpunk, $X(9)$.
Trilineales:

$(\operatorname{tag} B/2+\operatorname{tag} C/2-\operatorname{tag} A/2)/a : (\operatorname{tag} C/2+\operatorname{tag} A/2-\operatorname{tag} B/2)/b : (\operatorname{tag} A/2+\operatorname{tag} B/2-\operatorname{tag} C/2)/c$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = \frac{2-2\cos\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{3\theta}{2}}{2-\cos\dfrac{\theta}{2}}$$



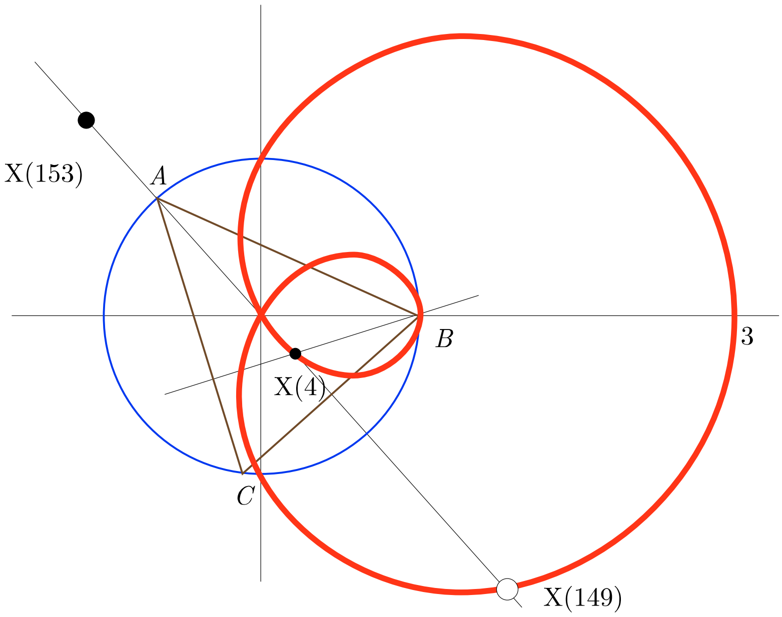
⊛ $X(149)$: ***Simétrico del*** $X(153)$ ***respecto al*** $X(4)$

Trilineales:

$$bc(b^3 + c^3 - a^3 + (a^2 - bc)(b + c) + a(bc - b^2 - c^2)) : \cdots$$

L.g.: Applet CabriJava Coincide con el lugar geométrico del ortocentro, $X(4)$.

$$\rho = 2\cos\theta - 1, \quad x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^3 - 4xy^2 + 3x^2 - y^2 = 0.$$



△
▽

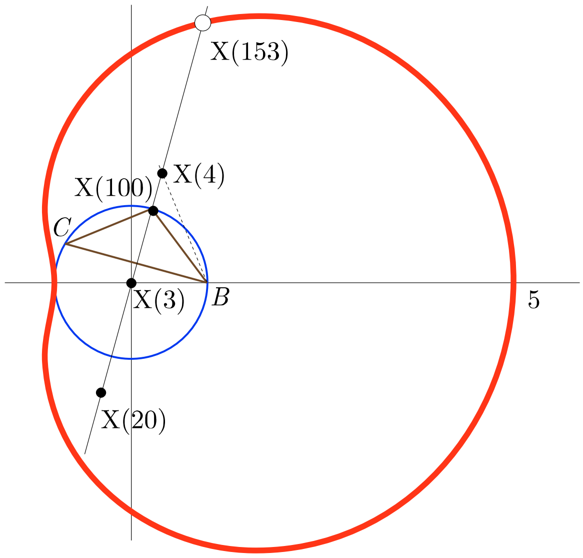
⊛ $X(153)$: ***Simétrico del*** $X(20)$ ***respecto al*** $X(100)$

Trilineales:

$$\frac{-a^7 + a^6(b+c) + (b-c)^4(b+c)^3 + a^5(b^2 - 7bc + c^2) - a(b^2-c^2)^2(b^2 - 5bc + c^2)}{a}$$
$$+\frac{-a^4(b^3 - 5b^2c - 5bc^2 + c^3) - a^2(b-c)^2(b^3 + 7b^2c + 7bc^2 + c^3) + a^3(b^4 + 2b^3c - 10b^2c^2 + 2bc^3 + c^4)}{a} : \cdots$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = 3 + 2\cos\theta, \qquad x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4x^3 - 4xy^2 - 5x^2 - 9y^2 = 0$$



Las coordenadas de este punto $X(153)$, para el caso de los triángulos isósceles que nos ocupan $a = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $b = c = 2\,\mathrm{sen}(\theta/2)$, quedan

$$x : y : z \quad = \quad -a^2(a-b)^2(a^2+4b^2) : \frac{a^5(a-b)^2}{b} : \frac{a^5(a-b)^2}{b} =$$

$$-4\,\mathrm{sen}^2\,\theta \left(-2\ \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} + 2\ \mathrm{sen}\,\theta\right)^2 \left(16\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2} + 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right) :$$

$$16\ \csc\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}^5\,\theta \left(-2\ \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} + 2\ \mathrm{sen}\,\theta\right)^2 : 16\ \csc\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}^5\,\theta \left(-2\ \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} + 2\ \mathrm{sen}^2\,\theta\right)^2$$

`TeXForm[Simplify[h[x,y][theta]]]` (pág.24)

$$3 + 2\ \cos\theta$$

A esta misma expresión de la longitud del radio vector, se llega usando las de los puntos $X(20)$ y $X(100)$:

$$\rho_{20} + \rho_{153} = 2\rho_{100}, \qquad \rho_{153} = 2 - (-1 - 2\cos\theta) = 3 + 2\cos\theta.$$

$\triangle$
∇

⊛ $X(182)$: *Punto medio del diámetro de Brocard*

Punto medio del segmento $X(3)X(6)$; el centro de la primera circunferencia de Lemoine; el centro de la circunferencia de Brocard.

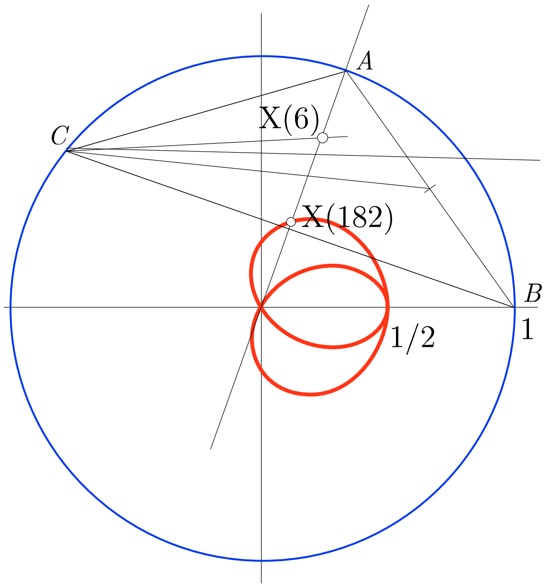
Trilineales:

$$a^5 - 2ab^2c^2 - a^3(b^2+c^2) : b^5 - 2bc^2a^2 - b^3(c^2+a^2) : c^5 - 2ca^2b^2 - c^3(a^2+a^2)$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = \frac{1 + 2\ \cos\theta}{2(2+\cos\theta)}.$$

$$12x^4 + 28x^2y^2 + 16y^4 - 12x^3 - 12xy^2 + 3x^2 - y^2 = 0.$$



△
▽

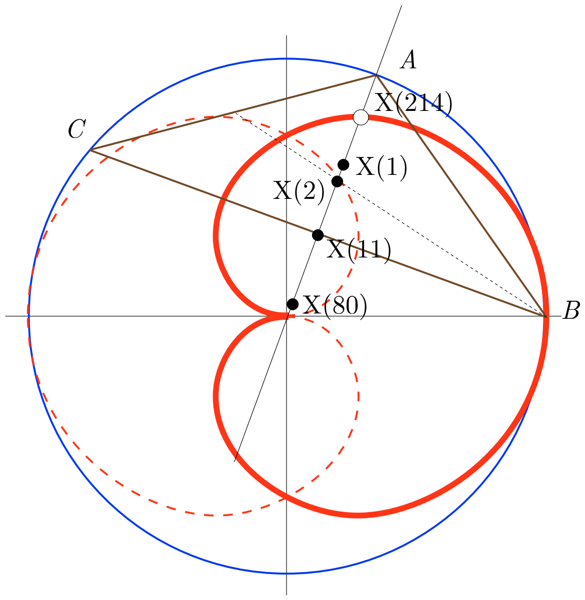
⊛ $X(214)$***: Complemento del*** $X(80)$

$$(b+c-2a)(b^2+c^2-a^2-bc):(c+a-2b)(c^2+a^2-b^2-ca):(a+b-2c)(a^2+b^2-c^2-ab)$$

L.g.: Applet CabriJava $\rho = 3\rho_2/2 - \rho_8 0/2$.

$$\rho = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$16x^12+96x^10y^2+240x^8y^4+320x^6y^6+240x^4y^8+96x^2y^10+16y^12-16x^8$$
$$-56x^6y^2-72x^4y^4-40x^2y^6-8y^8+y^4=0.$$



△
▽

⊛ $X(393)$

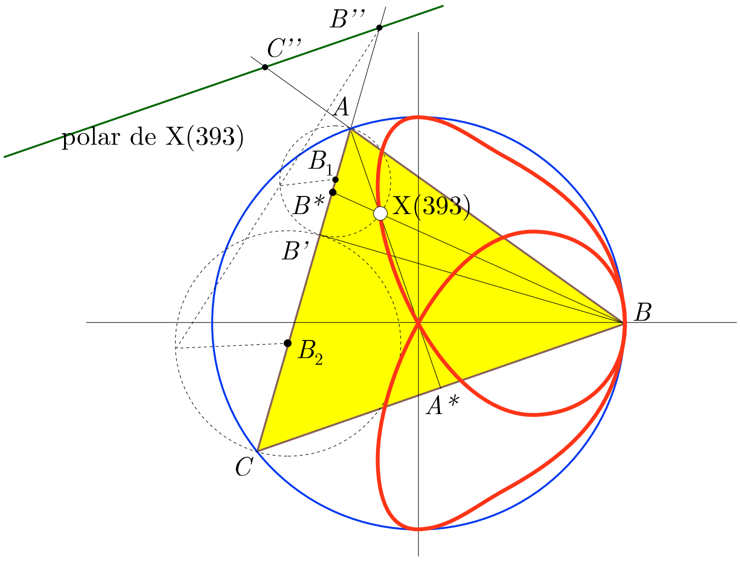
En un triángulo $\widehat{ABC}$, A' es el pie de la altura desde A, A'' es el centro de homotecia (distinto de A') de las circunferencias de diámetros $A'B$ y $A'C$. Similarmente, B'' y C''. Los puntos A'', B'' y C'' están en una recta, cuyo polo es el punto $X(393)$.

A'' es conjugado armónico de A' respecto a B_1 y B_2 (centros de las circunferencias de diámetros $A'B$ y $A'C$). Si A^* es el conjugado armónico de A'' respecto a B y C (similarmente B^* y C^*), entonces AA^*, BB^* y CC^*, concurren en $X(393)$.

$$bc\operatorname{tag}^2 A : ca\operatorname{tag}^2 B : ab\operatorname{tag}^2 C$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = \frac{3 + 7\,\cos\theta + \cos 2\,\theta + \cos 3\,\theta}{5 + 4\,\cos\theta + 3\,\cos 2\,\theta}$$



⊛ $X(427)$***: Complemento del*** $X(22)$

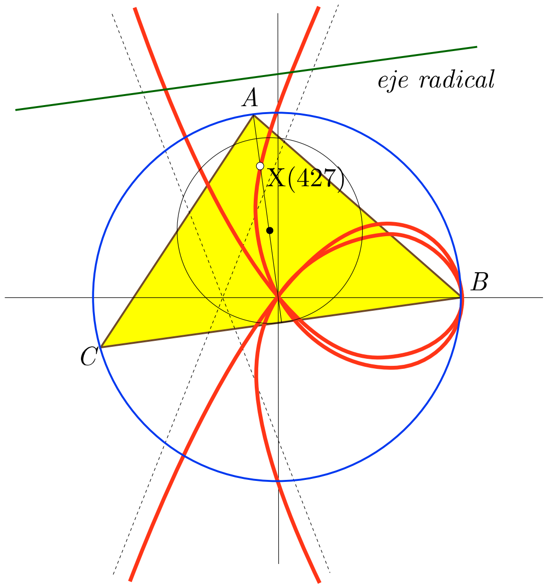
Polar del eje radical de la circunferencia de nueve puntos y la circunferencia circunscrita, respecto a la primera.

Trilineales:

$$\sec A + \cos(B - C) : \sec B + \cos(C - A) : \sec C + \cos(A - B)$$

L.g.: Applet CabriJava

$$\rho = \frac{1 + \cos\theta + 3\cos 2\,\theta + \cos 3\,\theta}{4\,\cos\theta + 2\,\cos 2\,\theta}$$



⊛ $X(2975)$: *Insimilicentro(circumcírculo, incírculo del triángulo anticomplementario)*

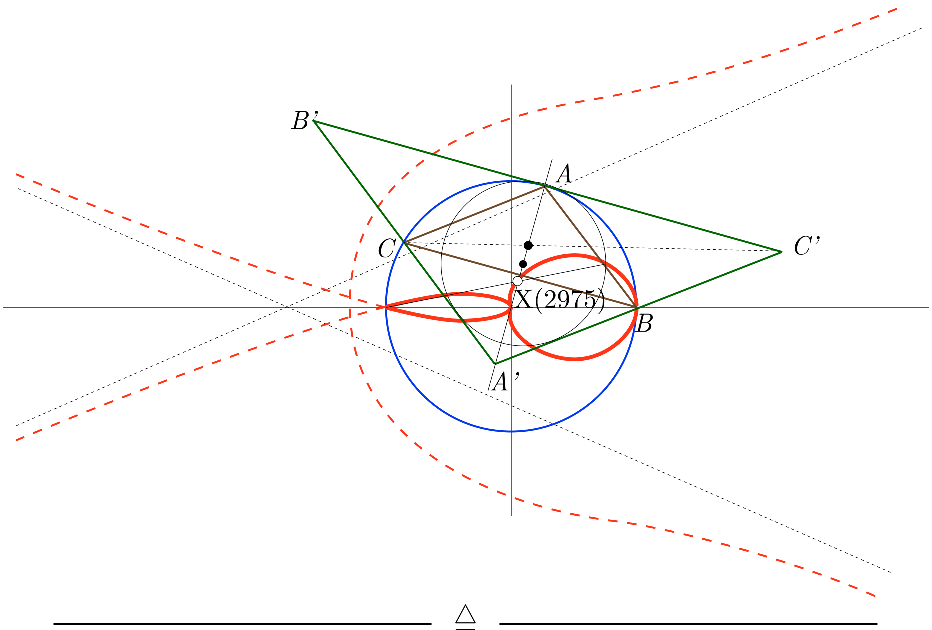
Centro de homotecia interior de las circunferencias circunscrita a $\widehat{ABC}$ e inscrita a su triángulo anticomplementario . Anticomplemento del $X(12)$.

Trilineales:

$$a^3 - ab^2 + abc - b^2c - ac^2 - bc^2 : b^3 - bc^2 + bca - c^2a - ba^2 - ca^2 : c^3 - ca^2 + cab - a^2b - cb^2 - ab^2$$

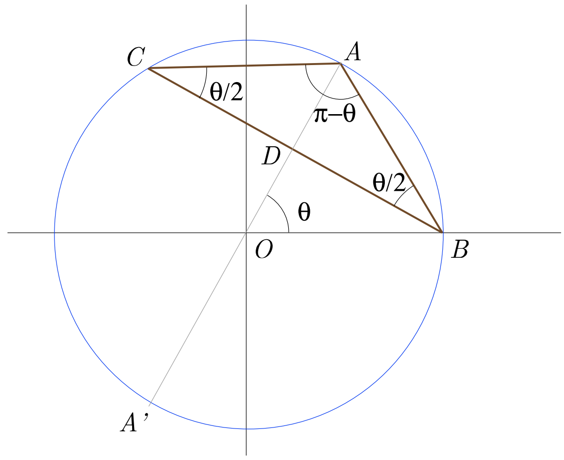
L.g.: Applet CabriJava

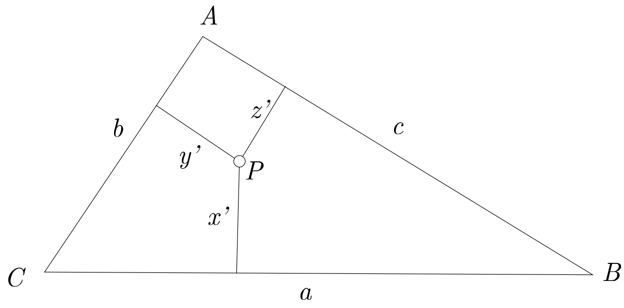
$$\rho = \frac{\left(1 - 2\,\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{-1 + 4\,\cos\dfrac{\theta}{2} - 2\,\cos\theta}$$



∗ Para cualquiera de los triángulos isósceles $\widehat{ABC}$ considerados, inscritos en la circunferncia Γ de centro en el origen y radio 1, ponemos $\widehat{BOA} = \theta$, por lo que se tiene:

$$\widehat{BAC} = \pi - \theta, \quad \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{\theta}{2}, \quad a := \overline{BC} = 2\operatorname{sen}\theta, \quad b := \overline{AC} = c := \overline{AB} = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}, \quad \overline{OD} = \cos\theta.$$





∗ En el triángulo $\widehat{ABC}$, de longitud de lados $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}, c = \overline{AB}$. Un punto P tiene coordenadas trilineales homogéneas $x : y : z$, esto significa que existe un función no nula h de (a, b, c) tal que

$$x = hx', \quad y = hy', \quad z = hz',$$

donde x', y', z' son las distancias desde P a los lados BC, CA, AB, respectivamente.

Las coordenadas trilineales exactas (x', y', z') puede ser calculadas por las fórmulas:

$$x' = \frac{2x\sigma}{ax + by + cz}, \qquad y' = \frac{2y\sigma}{ax + by + cz}, \qquad z' = \frac{2z\sigma}{ax + by + cz},$$

donde σ es el área del triángulo $\widehat{ABC}$.

∗ En nuestro caso:

$$\sigma = \frac{2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{tag}\frac{\theta}{2}}{2} = \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{tag}\frac{\theta}{2} = 4\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

Por lo que la distancia al centro O de la circunferencia Γ de un punto P, situado en la bisectriz de A (mediatriz de BC), de coordenadas homogéneas exactas (x', y', z'), con $y' = z'$, o coordenadas homogéneas arbitrarias $x : y : y$, es:

$$\rho = \overline{OD} + x' = \cos\theta + \frac{8x\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2x\operatorname{sen}\theta + 2y\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + 2z\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \cos\theta + \frac{2x\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{x\cos\frac{\theta}{2} + y}.$$

$$\boxed{\rho = \frac{x\cos\frac{\theta}{2} + y\cos\theta}{x\cos\frac{\theta}{2} + y}.}$$

Por ejemplo, la longitud del radio vector del circuncentro $X(3)$

$$x : y : z = \cos A : \cos B : \operatorname{sen} C = \cos(\pi - \theta) : \cos\frac{\theta}{2} : \cos\frac{\theta}{2} = -\cos\theta : \cos\frac{\theta}{2} : \cos\frac{\theta}{2}$$

es $\rho = 0$.

$*$ De hecho todos los puntos de ETC, relativos a un triángulo isósceles, están en la bisectriz interior del ángulo desigual, pues si

$$f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$$

son sus coordenadas trilineales, con f una función homogénea y cumpliendo $f(a,b,c) = f(a,c,b)$, se verifica que la segunda y tercera componentes de estas coordenadas son iguales, pues, como además $b = c$,

$$f(b,c,a) = f(b,a,c) = f(b,a,b) = f(c,a,b).$$

ast Conocido el radio vector de de terminados puntos se puden hallar el radio vector de otro, si se sabe la relación geométrica que los liga:

Y es el anticomplemento de X si el baricentro triseca al segmento XY y X está más próximo a éste que Y. En los triángulos isósceles considerados:

$$\rho_Y = 3\rho_G - 2\rho_X.$$

Y es el complemento de X, si el baricentro triseca al segmento XY e Y está más cerca de éste que X. En los triángulos isósceles considerados:

$$\rho_Y = \frac{3}{2}\rho_G - \frac{1}{2}\rho_X.$$

Si Y está armónicamente separado de X, repecto de P y Q,

$$\rho_Y = \frac{2\rho_P\rho_Q - (\rho_P + \rho_Q)\rho_X}{\rho_P + \rho_Q - 2\rho_X}.$$

$*$ Se define el primer punto de Brocard como el punto interior Ω de un triángulo para el cual los ángulos $\widehat{\Omega AB}$, $\widehat{\Omega BC}$ y $\widehat{\Omega CA}$ son iguales a un ángulo ω. De manera similar, se define el segundo punto de Brocard como el punto interior Ω' para el cual los ángulos $\widehat{\Omega' AC}$, $\widehat{\Omega' CB}$ y $\widehat{\Omega' BA}$ son iguales a un ángulo ω'. Entonces $\omega = \omega'$, y este ángulo se llama ángulo de Brocard.

El ángulo de Brocard de un triángulo está dado por la fórmula:

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{2\sigma}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

En nuestro caso,

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{2\sigma}{b\sqrt{2a^2 + b^2}} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}.$$

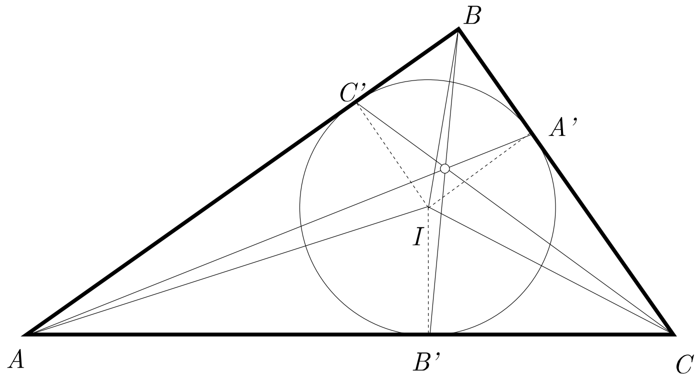
$*$ Para obtener la representación gráfica de cada lugar geométrico (p.e., del baricentro ⊛), en coordenadas polares, podemos utilizar Mathematica, con los siguientes comandos:

```
Needs["Graphics`Graphics`"]
h[x_,y_][theta_]:=(x*Cos[theta/2]+y*Cos[theta])/(x*Cos[theta/2]+y)
(*   Para el baricentro,   csc A : csc B : csc C    *)
PolarPlot[{h[Csc[Pi-theta],Csc[theta/2]][theta],1},{theta,0,4Pi}]
(*   Para expresar la ecuación en formato TeX  *)
TeXForm[Simplify[h[Csc[Pi-theta],Csc[theta/2]][theta]]]
```

Para obtener la ecuación implicita de cada lugar geométrico, conocida su ecuación en coordenadas polares (p.e.,del punto de Mittenpunkt: $X(9)$), podemos usar Mathematica, con los siguientes comandos:

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
Eliminate[{r==(1-Sqrt[(1+u)/2]+u)/(2-Sqrt[(1+u)/2]),
       x==r*u, y==r*v,x^2+y^2==r^2},{r,u,v}]
ImplicitPlot[%,{x,-1,1}]
```

∗ Punto de intersección (de Gergonne) de las rectas que une cada vértice de un triángulo con el punto de contacto de la circunferencia inscrita con lado opuesto.



Para demostrar la concurrencia de la rectas AA', BB' y CC', observemos que el incentro queda en las bisectrices del triángulo y los radios del incentro IA', IB' y IC' son perpendiculares a los lados. Así, se forman tres pares de triángulos rectángulos.

Los productos $(AC')(BA')(CB')$ and $(AB')(CA')(BC')$ son iguales, puesto que $BC' = BA'$, $CA' = CB'$, y $AB' = AC'$. Entonces, la razón de los productos es 1 y, por el teorema de Ceva, las tres cevianas del triángulo $\widehat{ABC}$ $(AA', BB',$ y $CC')$ son concurrentes.

$\triangle$
∇

⊛ *Glosario*

Anticomplemento Y es el anticomplemento de X si el baricentro triseca al segmento XY y X está más próximo a éste que Y. En los triángulos isósceles considerados: $\rho_Y = 3\rho_G - 2\rho_X$.

Complemento Y es el complemento de X, si el baricentro triseca al segmento XY e Y está más cerca de éste que X. En los triángulos isósceles considerados: $\rho_Y = \dfrac{3}{2}\rho_G - \dfrac{1}{2}\rho_X$.

ETC Encyclopedia of Triangle Centers

triángulo anticomplementario Triángulo formado por los anticomplementos de los vértices del dado