

# Construcciones geométricas

Angel Montesdeoca

Viernes 7 de Octubre del 2011

1 Sea la parábola  $y^2 = 2px$ ,  $O$  su vértice,  $G$  un punto situado sobre su eje con  $\overline{OG} > p$  y  $E$  un punto en el eje entre  $O$  y  $G$ , tal que  $\overline{EG} = p$ . Si  $A$  es uno de los puntos en que la perpendicular al eje en  $E$  corta a la parábola, demostrar que  $\overline{GA}$  es la mínima distancia de  $G$  a la parábola.

Observación: Esto nos da un método para construir la normal a una parábola desde un punto de su eje. Para el caso de que el punto no esté en el eje: [\(Ver también\)](#) / [Applet CabriJava](#)

2 Sea  $\mathcal{C}$  una parábola dada y un punto  $P$  que no esté sobre su eje. Justificar la siguiente construcción de la normal a la parábola desde el punto  $P$  (recta que corta a la parábola en ángulos rectos):

Desde  $P$  se traza la perpendicular al eje, que corta a éste en  $Q$ ; se toma el punto  $R$  sobre el eje tal que  $\overline{OR}$  ( $O$ , vértice de la parábola), tenga longitud igual a la mitad del latus rectum (cuerda perpendicular al eje y que pasa por el foco); sea  $M$  el punto medio del segmento  $RQ$ ; y  $L$  el punto sobre la perpendicular al eje, tal  $\overline{ML} = \frac{1}{4}\overline{PQ}$ . Entonces, la circunferencia de centro en  $L$  y que pasa por el vértice de la parábola, interseca a ésta en un punto  $A$  tal que la recta  $AP$  la corta en ángulos rectos.

[\(Ver también\)](#)

3 Dados en el plano un punto  $F$  y una recta  $d$ , Tomamos un punto  $H$  variable sobre  $d$ . Establecer que la envolvente de las mediatrices de los segmentos  $FH$  es una parábola. Esto da un método para construir una parábola por puntos. / [Applet CabriJava](#)

4 Construir un triángulo rectángulo con el vértice del ángulo recto sobre la recta  $y = 3x$  y los otros dos vértices en los puntos  $B(2, 1)$  y  $C(5, 5)$ . / [Applet CabriJava](#)

5 Inscribir un cuadrado en un triángulo, de tal modo que un lado del cuadrado esté sobre la base del triángulo y los otros dos vértices en los otros lados del triángulo. / [Applet CabriJava](#)

6 Dadas dos circunferencias  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  que se cortan en dos puntos  $A$  y  $B$ , trazar por uno de estos puntos,  $A$  por ejemplo, el mayor segmento posible comprendido entre dichas circunferencias. / [Applet CabriJava](#)

7 El punto de Steiner de un triángulo  $\widehat{ABC}$  se construye como sigue: Sea  $O$  el circuncentro y  $K$  el punto simediano (punto de Lemoine, ETC(9)) de  $\widehat{ABC}$  (punto de intersección de las simétricas de las medianas, respecto a las bisectrices). La circunferencia que tiene al segmento  $OK$  como diámetro es la circunferencia de Brocard. La recta a través de  $O$  perpendicular a la recta  $BC$  corta a la circunferencia de Brocard en otro punto,  $A'$ ; similarmente, se obtienen los puntos  $B'$  y  $C'$ . El triángulo  $A'B'C'$  es el primer triángulo de Brocard. Ahora, se traza la recta por  $A$  paralela a la recta  $B'C'$ , la recta a través de  $B$  paralela a la recta  $C'A'$ , y la recta a través de  $C$  paralela a la recta  $A'B'$ . Demostrar que estas tres rectas concurren en un punto  $S$  sobre la circunferencia circunscrita al triángulo  $\widehat{ABC}$ , llamado punto de Steiner, ETC(99). / [Applet CabriJava](#)

8 Dados tres puntos  $I, H, M$  sobre una circunferencia  $\mathcal{C}$ , construir un triángulo  $\widehat{ABC}$  inscrito en  $\mathcal{C}$  tal que  $I$  sea la intersección de la bisectriz de  $\widehat{BAC}$  con  $\mathcal{C}$ ,  $H$  la intersección de la altura por  $A$  con  $\mathcal{C}$  y  $M$  la intersección de la mediana por  $A$  (o su prolongación).

/ [Applet CabriJava](#)

9 Construir, usando sólo compás, el punto medio de un segmento.

/ [Applet CabriJava](#)

10 Construir el centro de una circunferencia, utilizando sólo compás. / [Applet CabriJava](#)

11 Inscribir, usando sólo compás, un cuadrado en una circunferencia. / [Applet CabriJava](#)

12 Dada una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$  y un punto  $A$  en ella. Trazar la perpendicular desde un punto  $C$  de su plano a la recta  $OA$ , empleando sólo regla.

/ [Applet CabriJava](#)

- 13 Sea dan dos triángulos  $\widehat{A_0B_0C_0}$  y  $\widehat{A_1B_1C_1}$ . Construir el triángulo  $\widehat{ABC}$  con el mayor área posible que esté circunscrito a  $\widehat{A_0B_0C_0}$  ( $BC$  conteniendo a  $A_0$ ,  $CA$  conteniendo a  $B_0$  y  $AB$  conteniendo a  $C_0$ ) y semejante a  $\widehat{A_1B_1C_1}$ . / [Applet CabriJava](#)
- 14 Construir un cuadrado con la misma área que un triángulo dado. / [Applet CabriJava](#)
- 15 Construir un cuadrado, si se conocen uno de sus vértices y dos puntos en los dos lados o sus continuaciones, que no pasan por el vértice dado. / [Applet CabriJava](#)
- 16 Dado un cuadrado  $ABCD$ , tomar un punto  $P$  en  $AB$ . Construir un cuadrado  $PQRS$  inscrito en el cuadrado  $ABCD$ . Construir un cuadrado  $EFGH$  inscrito en  $PQRS$  con lados paralelos a  $ABCD$ . / [Applet CabriJava](#)
- 17 Dado un cuadrado  $ABCD$  y un punto  $P$  interior al cuadrado, construir un cuadrado  $EFGH$ , inscrito en  $ABCD$  tal que  $P$  pertenezca a uno de los lados de  $EFGH$ . / [Applet CabriJava](#)
- 18 Construir una circunferencia tangente a una dada en uno de sus puntos  $T$  y que pase por un punto  $P$  del plano. / [Applet CabriJava](#)
- 19 Construir una circunferencia de radio  $r$ , que pase por un punto  $M$  y tangente a una recta  $d$ . / [Applet CabriJava](#)
- 20 Construir la circunferencia tangente a dos rectas, dándose el punto de contacto de una de ellas. / [Applet CabriJava](#)
- 21 Construir las circunferencias de radio  $r$  y tangentes a dos rectas. / [Applet CabriJava](#)
- 22 Construir la circunferencia de radio  $r$ , tangente a una circunferencia dada y que pasa por un punto  $M$  / [Applet CabriJava](#)
- 23 Construir la circunferencia de radio  $r$  y tangente a otras dos dadas. / [Applet CabriJava](#)
- 24 Construir la circunferencia tangente a una recta  $d$  y que pasa por dos puntos  $A$  y  $B$ . / [Applet CabriJava](#)
- 25 Dados un punto, una recta y una circunferencia, construir la circunferencia que pase por el punto y sea tangente tanto a la recta como a la circunferencia. / [Applet CabriJava](#)
- 26 Construir la circunferencia tangente a una circunferencia dada y a una recta en uno de sus puntos. / [Applet CabriJava](#)
- 27 Construir una circunferencia tangente a otra en un punto  $P$  y a una recta. / [Applet CabriJava](#)
- 28 Construir la circunferencia que pasa por un punto, cuyo centro está en una recta y que es tangente a otra circunferencia.
- 29 Construir la suma y la multiplicación de dos números usando rectas paralelas. / [Applet CabriJava](#)
- 30 Construir la parábola que pasa por tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  y su eje tiene la dirección de una recta  $d$  dada. / [Applet CabriJava](#)
- 31 Construir el centro de semejanza determinada por dos triángulos homólogos. / [Applet CabriJava](#)
- 32 Construir los puntos de intersección de dos cónicas que tienen un foco común. / [Applet CabriJava](#)
- 33 Construir la cónica tangente a cuatro rectas, conocido el punto de contacto en una de ellas. / [Applet CabriJava](#)
- 34 Construir un arco de parábola, con foco  $F$  y directriz  $d$ , valiéndose de una escuadra y una cuerda de longitud  $\ell$ . / [Applet CabriJava](#)
- 35 Construir, usando sólo compás, los puntos de intersección de una recta dada por dos de sus puntos  $A$  y  $B$ , con la circunferencia de centro  $C$  y que pasa por un punto  $D$ . / [Applet CabriJava](#)
- 36 Una homología (geométrica) es una transformación del plano en sí mismo que lleva puntos alineados en puntos alineados y que tiene una recta de puntos dobles (eje de homología) y, por consiguiente, un punto doble (centro de homología).

Dados dos pares de rectas que se cortan, determinar una homología que transforme cada par de rectas en un par de rectas perpendiculares. / [Applet CabriJava](#)

- 37 Construir una parábola dadas cuatro tangentes. / [Applet CabriJava](#)
- 38 Construir el triángulo equivalente (misma área) al polígono irregular  $ABCDE$ .
- 39 Dados el punto  $A$ , la recta  $r$  y sus elementos homólogos  $A'$  y  $r'$ , el centro de homología  $O$ , se pide determinar el eje de la homología que definen. / [Applet CabriJava](#)
- 40 De una homología afín en el plano, se conocen los puntos  $A, B$  y sus homólogos  $A', B'$  y el punto  $Q$  del eje de homología. Sabiendo que  $AB$  es paralelo a  $A'B'$ , se pide:  
Construir el eje y los homólogos de los triángulos equiláteros que tengan como uno de sus lados el  $AB$  dado. / [Applet CabriJava](#)
- 41 Toda cónica puede ser proyectada mediante una homología en una circunferencia. / [Applet CabriJava](#)
- 42 Encontrar la curvatura y centro de curvatura de la cónica  $x^2 - 2xy + y^2 - x + 3y - 4 = 0$  en el punto  $(0, 1)$ . / [Applet CabriJava](#)
- 43 Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$  hallar una homología que lo transforme en un triángulo equilátero. / [Applet CabriJava](#)
- 44 Construir la circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a una circunferencia dada. (Ver también) / [Applet CabriJava](#)
- 45 Se da una circunferencia  $\mathcal{C}$  y dos puntos  $A$  y  $B$  en la tangente en uno punto  $P$  de ella. Construir la circunferencia que pasa por  $A$  y  $B$  y es tangente a  $\mathcal{C}$ . (Ver también) / [Applet CabriJava](#)
- 46 Dados tres circunferencias  $C(O), C(O')$  y  $C(O'')$ , construir un triángulo semejante al triángulo  $\widehat{OO'O''}$  cuyos vértices estén, respectivamente, sobre las tres circunferencias dadas. / [Applet CabriJava](#)
- 47 Construir gráficamente la homología que proyecta un cuadrilátero en un cuadrado de lado dado. / [Applet CabriJava](#)
- 48 Dado un triángulo, inscribir un triángulo semejante en una circunferencia dada. / [Applet CabriJava](#)
- 49 Construir un triángulo equilátero, de modo que cada vértice se encuentre sobre cada una de tres circunferencia concéntricas. / [Applet CabriJava](#)
- 50 Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$ , con los vértices  $B$  y  $C$  fijos y  $A$  variando en una circunferencia de radio  $b$ . Lugar geométrico del pie  $V_c$  de la bisectriz en  $C$ , cuando  $A$  varía. / [Applet CabriJava](#)
- 51 Dadas una circunferencia de radio  $r_1$  y una tangente a ella, construir una circunferencia de radio  $r_2$  tangente a los dos objetos dados. / [Applet CabriJava](#)
- 52 Un triángulo equilátero de lado  $2a$  es seccionado simétricamente en un cuadrilátero, un triángulo isósceles y dos triángulo congruentes. Si los radios de las circunferencias inscritas en el cuadrilátero y en el triángulo isósceles son iguales, este valor común es  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})a$ . Construir tal partición.  
/ [Applet CabriJava](#)
- 53 Construir dos circunferencias de mismo radio, tangentes entre sí, con centros en un mismo eje de simetría de un triángulo equilátero y tal que una de ellas es tangente a dos de los lados del triángulo y la otra al tercero. / [Applet CabriJava](#)
- 54 Dada una recta y una cónica, definida por cinco puntos, construir los puntos de intersección entre recta y cónica. / [Applet CabriJava](#)
- 55 Construir una cónica (elipse o hipérbola) de la que se conocen la distancia focal y la longitud del eje focal. / [Applet CabriJava](#)
- 56 Determinar gráficamente el punto de corte de una hipérbola con una recta paralela a una asíntota, conociendo las dos asíntotas y un punto de la hipérbola. / [Applet CabriJava](#)
- 57 Construir el foco y directriz de una parábola de la que se conoce un punto, la tangente en otro punto y la dirección de su eje. / [Applet CabriJava](#)

- 58 Dada una elipse de focos  $F$  y  $F'$  y de longitud del eje mayor  $2a$ , construir los puntos de intersección de esta elipse con una recta que pasa por el centro de la elipse. / [Applet CabriJava](#)
- 59 Dados un punto y dos circunferencias, construir una circunferencia que sea tangente a las dos circunferencias y pase por el punto.
- 60 Sea la homología de centro  $O$ , eje  $e$  y recta límite  $\ell$ , y sea  $\Gamma$  la circunferencia de centro en  $C$  y tangente a la recta límite. Construir el eje y vértice de la parábola homóloga de  $\Gamma$ . / [Applet CabriJava](#)
- 61 Sea la homología de centro  $O$ , eje  $e$  y recta límite  $\ell$ , y sea  $\Gamma$  una circunferencia de centro en  $C$  y que corta a la recta límite. Construir el eje, vértices y asíntotas de la hipérbola homóloga de  $\Gamma$ . / [Applet CabriJava](#)
- 62 Dadas en una circunferencia dos cuerdas, con un punto común, construir las circunferencias tangentes a las rectas que las cuerdas determinan y a la circunferencia dada. / [Applet CabriJava](#)
- 63 Dado el triángulo  $\widehat{ABC}$  y un punto  $D$  en su plano, determinar los elementos de la homología (centro, eje y recta límite) que transforme el triángulo  $\widehat{ABC}$  en otro equilátero de lado dado y el punto  $D$  en su ortocentro. / [Applet CabriJava](#)
- 64 Sean tres rectas concurrentes (tienen un punto  $O$  en común)  $p, q$  y  $r$ . Construir un triángulo equilátero de lado dado, tal que sus vértices estén apoyados sobre dichas rectas (el vértice  $A$  sobre la recta  $p$ , el vértice  $B$  sobre la recta  $q$ , el vértice  $C$  sobre la recta  $r$ ).
- 65 Construir la intersección de una elipse con una recta. / [Applet CabriJava](#)
- 66 Dada una parábola y un punto  $A$  exterior a ella, construir la asíntota de la cúbica pedal (podaria) de la parábola respecto a  $A$ . / [Applet CabriJava](#)
- 67 Dadas en plano dos rectas  $r$  y  $s$  y un punto  $M$  no perteneciente a ellas, construir el segmento  $PQ$ , con extremos en  $r$  y  $s$  y tal que  $M$  sea su punto medio. / [Applet CabriJava](#)
- 68 Sea  $M$  un punto sobre una circunferencia de centro en  $O$ , y sea  $A$  un punto sobre la recta  $OM$ , con  $OA > OM$ . Sean  $P$  y  $P'$  los puntos donde las tangentes desde  $A$  intersecan a la circunferencia y sean  $T$  y  $T'$  los puntos medios de los segmentos  $AP$  y  $AP'$ . Construir la tangente en  $T$  al lugar geométrico que describen  $T$  y  $T'$ , cuando  $A$  varía. / [Applet CabriJava](#)
- 69 Construir la cónica de la que nos dan una directriz, una tangente, su punto de tangencia y otro punto. / [Applet CabriJava](#)
- 70 Construir los puntos de intersección (mediante una homología) de una recta con una cónica, conociendo de ésta tres puntos y las tangentes en dos de ellos. / [Applet CabriJava](#)
- 71 Construir una cónica de la que se conocen tres puntos y un foco. / [Applet CabriJava](#)
- 72 Construir la parábola de la que se conocen dos tangentes y sus puntos de contacto. / [Applet CabriJava](#)
- 73 Dada la parábola tangente a las dos rectas  $a$  y  $b$  en los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Sea  $P$  el punto de intersección de dichas tangentes, demostrar que el punto medio  $Q$  de la mediana en el triángulo  $PAB$  que parte del vértice  $P$ , pertenece a la parábola y que la tangente en  $Q$  es paralela al lado  $AB$ . Deducir de ello un método de construir un arco de parábola.
- 74 Se conocen los simétricos de un segmento respecto a los lados de un triángulo, determinar éste sin conocer la ubicación del segmento original. / [Applet CabriJava](#)
- 75 Dos tangentes a una parábola desde un punto  $A$ , forman un ángulo dado  $A$ . La bisectriz de este ángulo corta a la parábola en un punto  $V_a$ , tal que  $AV_a$  tiene una longitud dada. El segmento de la tangente en  $V_a$ , comprendido entre las tangentes anteriores tiene longitud  $a$  dada.
- 1) Trazar la tangente en  $V_a$ .
  - 2) Hallar el foco y la directriz de la parábola.
  - 3) Hallar el polo de la bisectriz  $AV_A$  y la polar de  $A$  respecto a la parábola. / [Applet CabriJava](#)

76 Construir una elipse conocido el eje menor,  $BB'$ , y una tangente a ella,  $t$ .

/ [Applet CabriJava](#)

77 Encontrar el centro de la semejanza directa que lleva dos triángulos rectángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$ , situados de tal forma que sus hipotenusas están en dos rectas que se cortan según un ángulo de  $30^\circ$  y dispuesto de forma que las distancias al punto de corte de las rectas de  $B$  es 1, de  $C$  es 6, de  $B'$  es 2 y de  $C'$  es 4.5.

Si además las longitudes de los catetos del triángulo  $\widehat{ABC}$  son 3 y 4, obtener los vértices  $A$  y  $A'$  uno del otro.

78 Sean  $\widehat{ABC}$  un triángulo,  $P$  un punto de su plano,  $M_a$  el punto medio de  $BC$  y  $X$  un punto del segmento  $MC$ .

(a) Hallar el foco de las posibles hipérbolas que pasan por  $A$  y  $P$ , cuya directriz es la recta  $BC$  y cuya excentricidad es la razón  $BX : XC$ .

(b) Determinar la posición del punto  $P$  para que el problema tenga dos soluciones, una o ninguna. / [Applet CabriJava](#)

79 Construir una elipse o hipérbola dados los dos focos y una tangente.

/ [Applet CabriJava](#)

80 Construir una elipse o hipérbola dados un foco y tres tangentes. / [Applet CabriJava](#)

81 Construir los puntos dobles de la involución sobre una recta que tiene como puntos conjugados los de intersección de dicha recta con cada cónica del haz que pasa por cuatro puntos. / [Applet CabriJava](#)

82 Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$ , construir un segmento de extremos  $C_a$  en  $AB$  y  $B_a$  en  $AC$  de manera que  $BC_a = CB_a = B_aC_a$ .

/ [Applet CabriJava](#)